SUNGARD CADEXTAN

L'informatique qui réinvente la finance

Arnaud Nauwynck

Modélisation Objet de Librairie de Pricing

Partie 2 : Algorithmique
Méthodes Numériques, Algorithme de Décomposition de Pricing

Calendrier Général : Partie 1, **2**, 3, 4

- Partie 1: Mathématique
  - Description générale des concepts
  - Introduction mathématique au pricing
- **Partie 2: Algorithmique (aujourd'hui)**
  - **...**
- Partie 3: Informatique
  - Modélisation Orientée-Objet du Pricing
- Partie 4: Informatique
  - Modélisation Orientée-Objet des Instruments, langage de description d'instruments

SUNGARD

Plan

- Discrétisations Numériques d'EDP
  - Méthodes des différences finies
  - Problèmes numériques : convergences, maillages
- Exemples de Décomposition d'Options
  - Démo Pricing, Graph Pricing 3D
  - Options européennes, américaines, triggers, ...
  - Introduction Design Pattern Visitor, présentation 3

SUNGARD

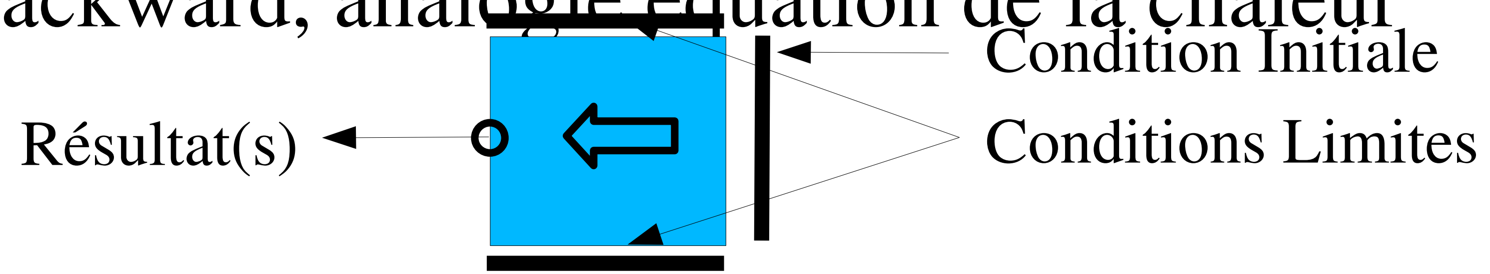
Rappel : Equation de Pricing

- Modèles Discrets
  - Monte-Carlo
  - Arbre binomial (Cox)
- Modèles Continus: Modèle de Diffusion
  - Exemple : Modèle de Black-Scholes
    $dS_t/S_t = \mu_t\, dt + \sigma_t\, dW_t$
- Calcul de Ito
  - W_t brownien, $W_t - W_0 \sim N(0, \sigma\sqrt{t})$... $dW_t^2 = \langle dW_t, dW_t \rangle = dt$
  - $dX_t = a_t\, dt + \sigma_t\, dW_t$
  - $f(X+dX) = f(X) + df/dx \,.\, dX + ½\, d^2f/dx^2 \,.\, \sigma^2\, dt$

SUNGARD

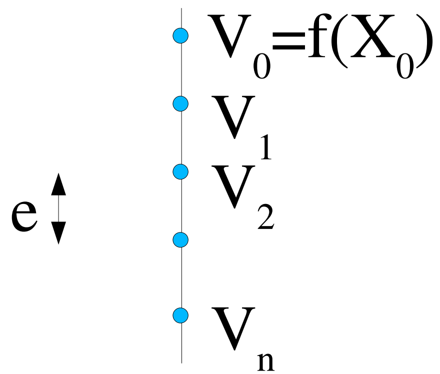
Rappel : EDP

- Equation différentielle :
  - $dV_t/dt = \underbrace{r\,V_t}_{A} - \underbrace{\mu_t S_t}_{B} \,.\, dV_t/dS - \underbrace{½\,\sigma^2 S_t^{\,2}}_{C} \,.\, d^2V_t/dS^2$
  - V(T) = valeur intrinsèque
- Avec
  - A = terme exponentiel, de taux sans risque
  - B = terme de déplacement (drift du modèle = swap)
  - C = terme de diffusion (volatilité)
- ODE backward, analogie équation de la chaleur

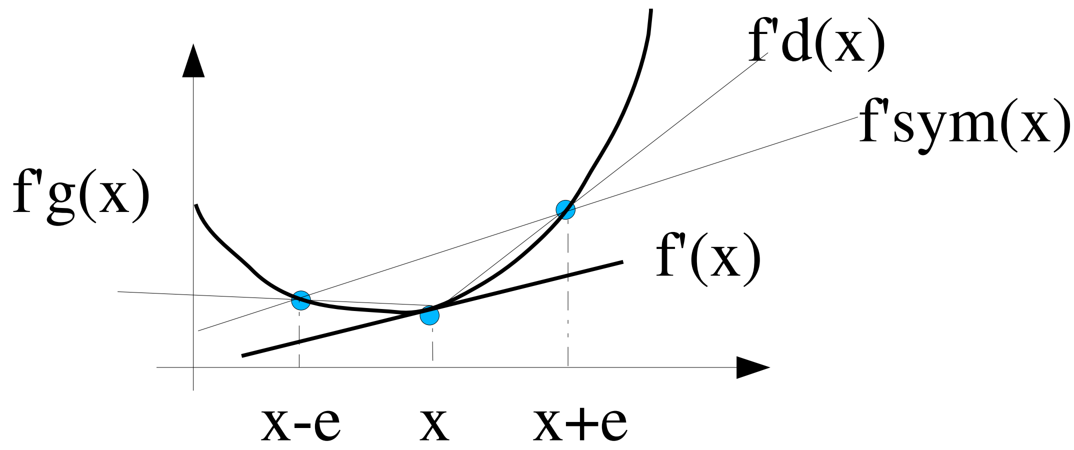


Méthode des Différences Finies

- On se donne une grille de points pour approximer une fonction



Dimension 1



- Approximation des dérivées partielles : par différences finies
  df(x)/dx ~ (f(x+e) – f(x)) / e dérivée à droite
  ~ (f(x+e) – f(x-e)) / 2e ...symétrique

- d^2f/dx^2 ~ (f(x+e) – 2 f(x) + f(x-e)) / e^2

Discrétisation et Schéma Numérique

- Appliquons la transformation à l'EDP :
  - $dV/dt = c\, d^2V/dx^2 + \ldots$
- On choisit par exemple
  - Une différence symétrique pour les termes d/dx
  - Une différence gauche pour d/dt
- $(V_{t-1,x} - V_{t,x})/dt = c/e\,(V_{t,x+1} - 2\,V_{t,x} + V_{t,x+1}) + \ldots$
- Soit sous forme matricielle: (avec a = c dt / e)

$$\begin{pmatrix} V_{t-1,x1} \\ V_{t-1,x2} \\ \vdots \\ V_{t-1,xn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2a & a & & \\ a & 1-2a & a & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & a & 1-2a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V_{t,x1} \\ V_{t,x2} \\ \vdots \\ V_{t,xn} \end{pmatrix} + \ldots$$

Discrétisation et Equation Matricielle

- On se ramène donc à un système **explicite**
  - $V_{t-1,x} = M\ V_{t,x}$
- Dans le cas d'une différence droite pour d/dt, on obtient un système **implicite** :
  - $M\ V_{t-1,x} = V_{t,x} \Rightarrow V_{t-1,x} = M^{-1} V_{t,x}$ (M inversible...?)
- **Théta-schéma** (combinaison linéaire..)
  - $M\ V_{t-1,x} = \theta\ N\ V_{t,x} + (1-\theta)\ N\ V_{t-1,x}$
- pour **θ=0.5** : Schéma de **Cranck-Nicholson**

Méthode Implicite/Explicite

SUNGARD

Schéma Euler explicite, ordre 1 dt

... instable

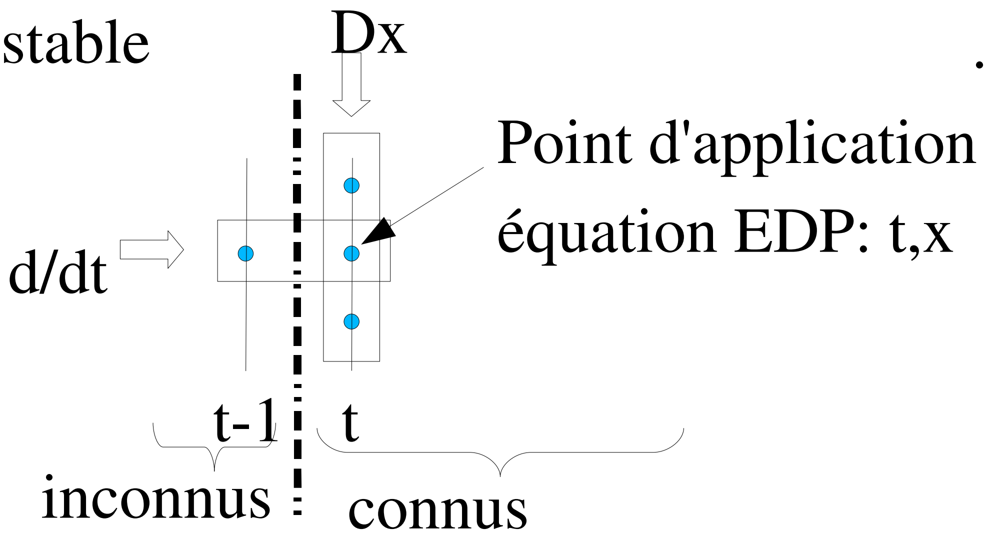


Schéma Euler implicite, ordre 1 dt

... stable

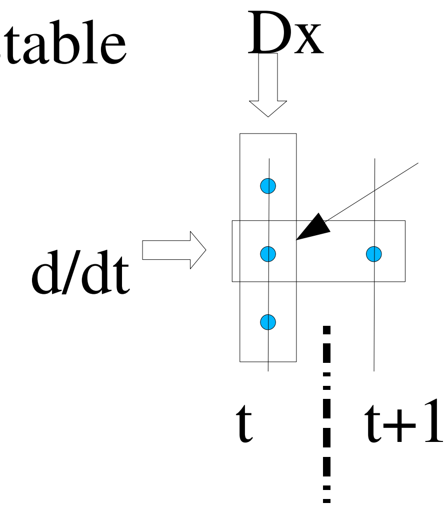
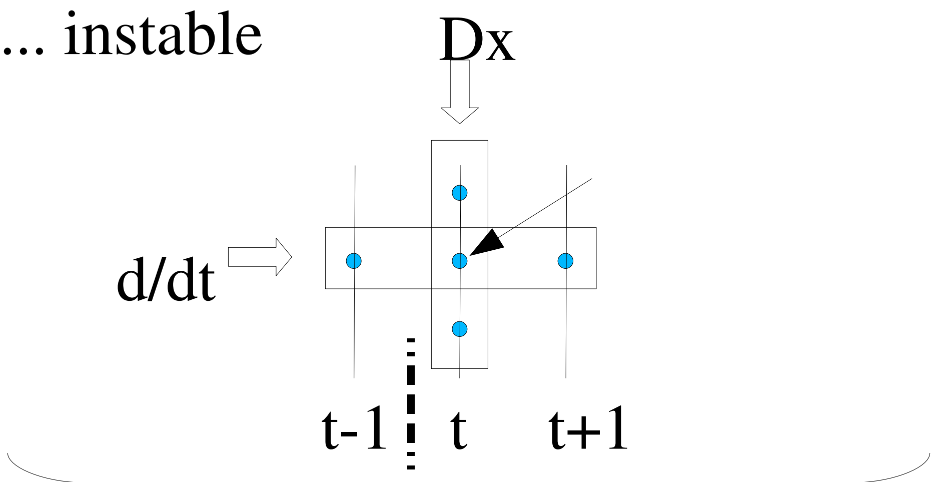


Schéma symétrique, ordre 2 dt

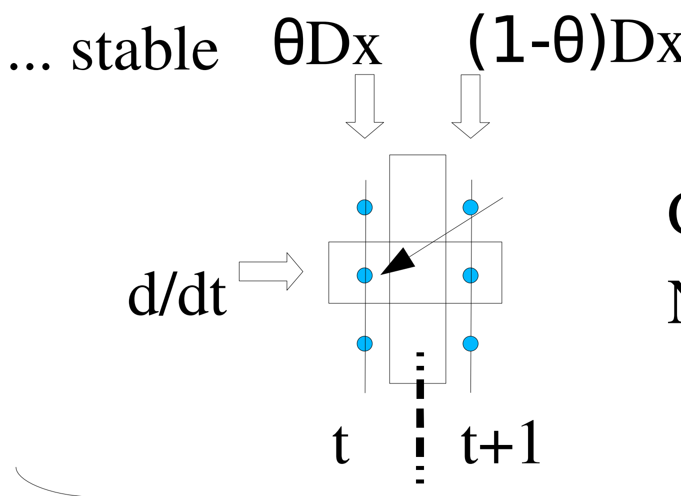
... instable



Explicite... instable

Théta-Schéma implicite

... stable



Cranck-Nicholson:

θ = 0.5

Implicite... stable

Comparaison Méthodes Implicites/Explicites

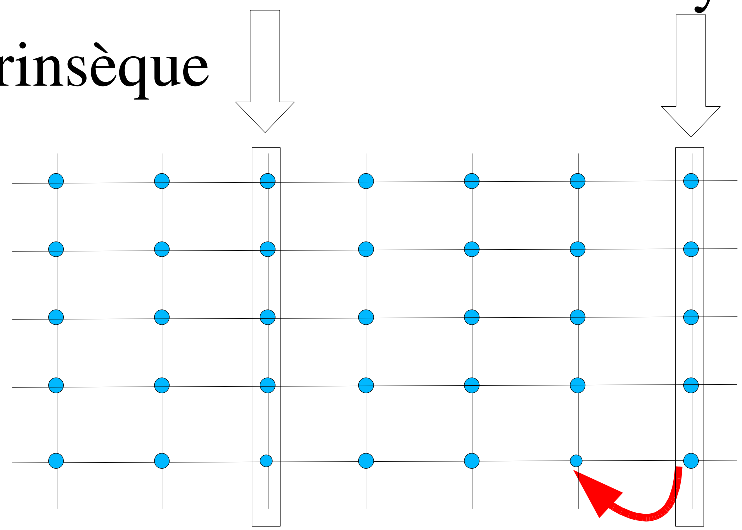
- Méthode explicite
  - Multiplication matricielle (simple)
  - MAIS Problème d'instabilité numérique
- Méthode implicite
  - Convergence = stable, mais peu rapide
  - Inversion d'une matrice
  - .... Mais Ok: matrice par bande (tri-diagonale)
- Méthode de Cranck-Nicholson
  - Stable, et convergence optimale
  - Inversion d'une matrice tri-diagonale

SUNGARD

Pas de Diffusion Implicites/Explicites

Ajout valeur intrinsèque

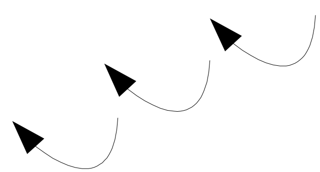
Payoff (condition initiale)



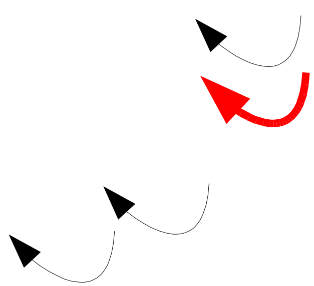
ANNEXE

step 1 : valeur à l'Echéance

=> Explicite => ordre1



step 2..N => Cranck-Nicholson => ordre2



injection de valeur =>

- Cranck-Nicholson pour valeur diffusée
- Explicite pour valeur ajoutée

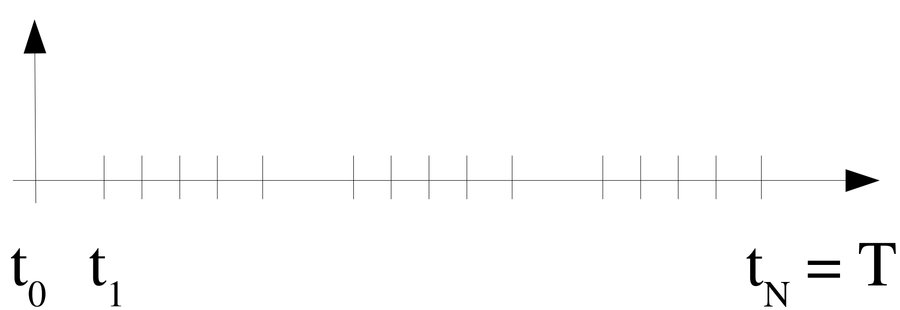
Remaque : Matlab... ode34, ode45

= méthodes pour résoudre y'=f(x) (dim 0), mais avec plusieurs points t,t+1,t+2

Choix du Maillage en Temps

ANNEXE

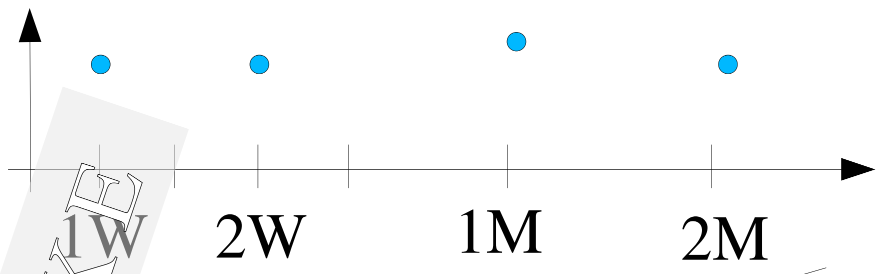
- Choix du nombre N de pas
- Choix de changement de variable (changement d'équation EDP)
- Choix des points t_0, t_1, .. t_{N-1}
  - échelle linéaire en Variance (et non en temps!)
- Rajouts de points pour événements et discontinuités (coupons, début/fin trigger, etc..)

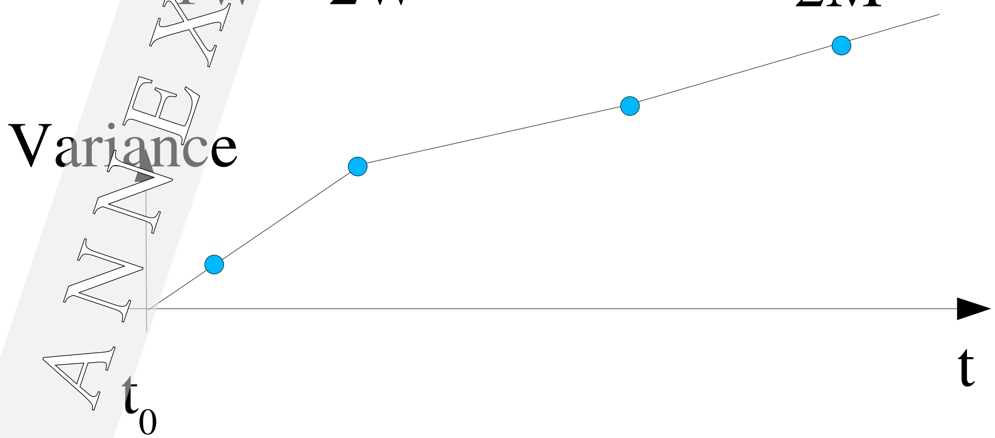


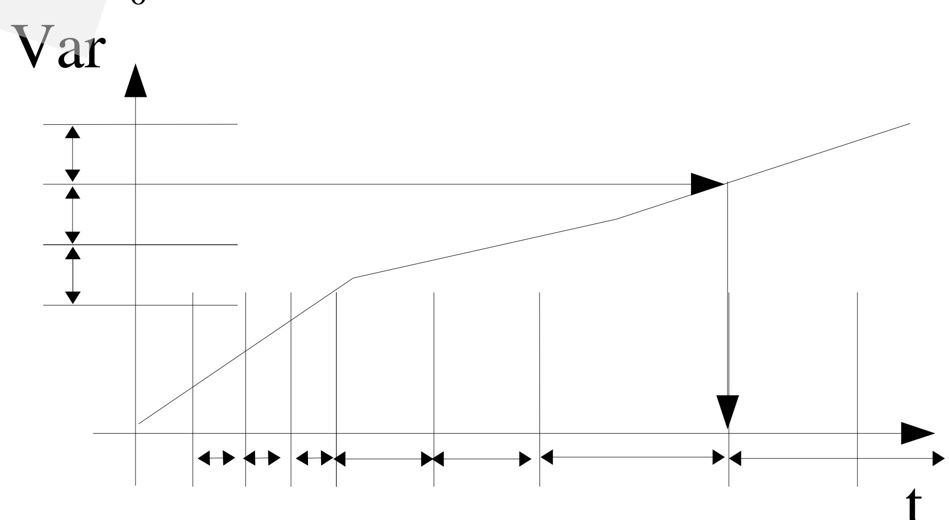
SUNGARD

Détail : Pas de Temps Linéaire en Variance

Vols ATM Marché (maturités standards)







But :

il ne faut diffuser que dans

les domaines où il y a de la volatilité

Volatilité importante

<=> grande densité de points

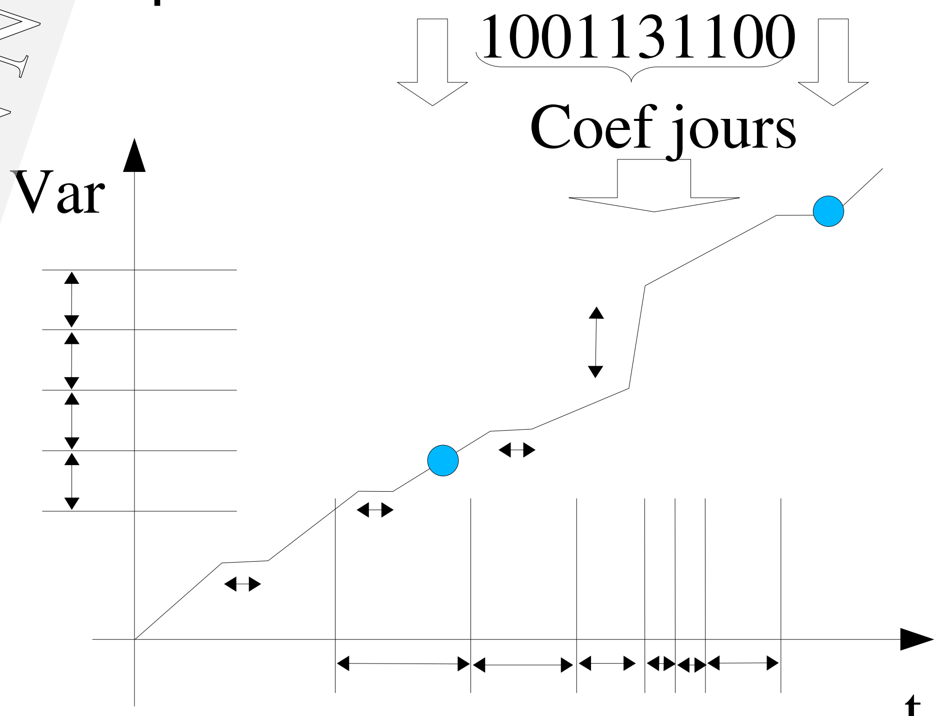
$$Variance(T_{mat}) = \int_0^{T_{mat}} \sigma^2_{inst.}(t)\,dt = \sigma^2(T_{mat})\frac{NbJour_{mat}}{365}$$

Solving :

t_i tel que Variance(t_i) = i . ΔVar

Détail : Interpolation en Variance

- Plus précisément, l'échelle en temps est liée à la façon d'interpoler dans la courbe de volatilité
- Cas particulier Week-End (coef=0) et Jours Evénements (>1)
  - pas de marché ouvert
  - => peu de volatilité entre le vendredi soir et le lundi matin
  - => peu de diffusion... discount seulement...



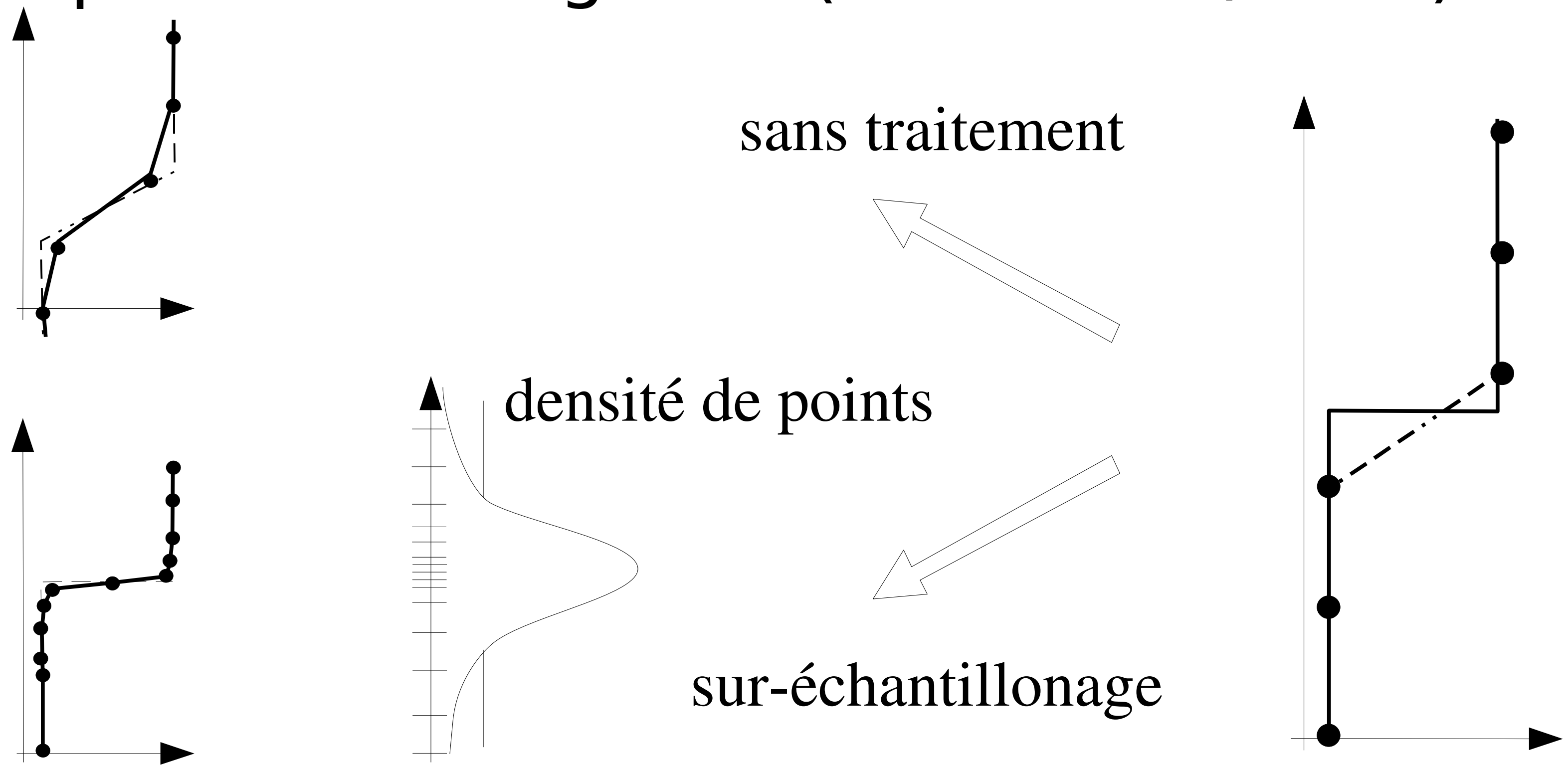
$$var\ jour(j) = \frac{coef\ jour(j)}{\sum coef\ jour(i)} \Delta Var$$

Choix du Maillage en Espace

- Nombre N de pas
- Changement de variable (changement d'équation EDP): Spot / logFwd
- Points $S_0, S_1, .. S_{N-1}$
  - répartition log normal
  - range min-max = $2\ \sigma \sqrt{T}$
    ($\sigma\sqrt{t}$ = écart-type de la loi log-normal)
- Rajouts de points pour événements et discontinuités (binaire, trigger, etc..)

Raffinement du Maillage,Discontinuité

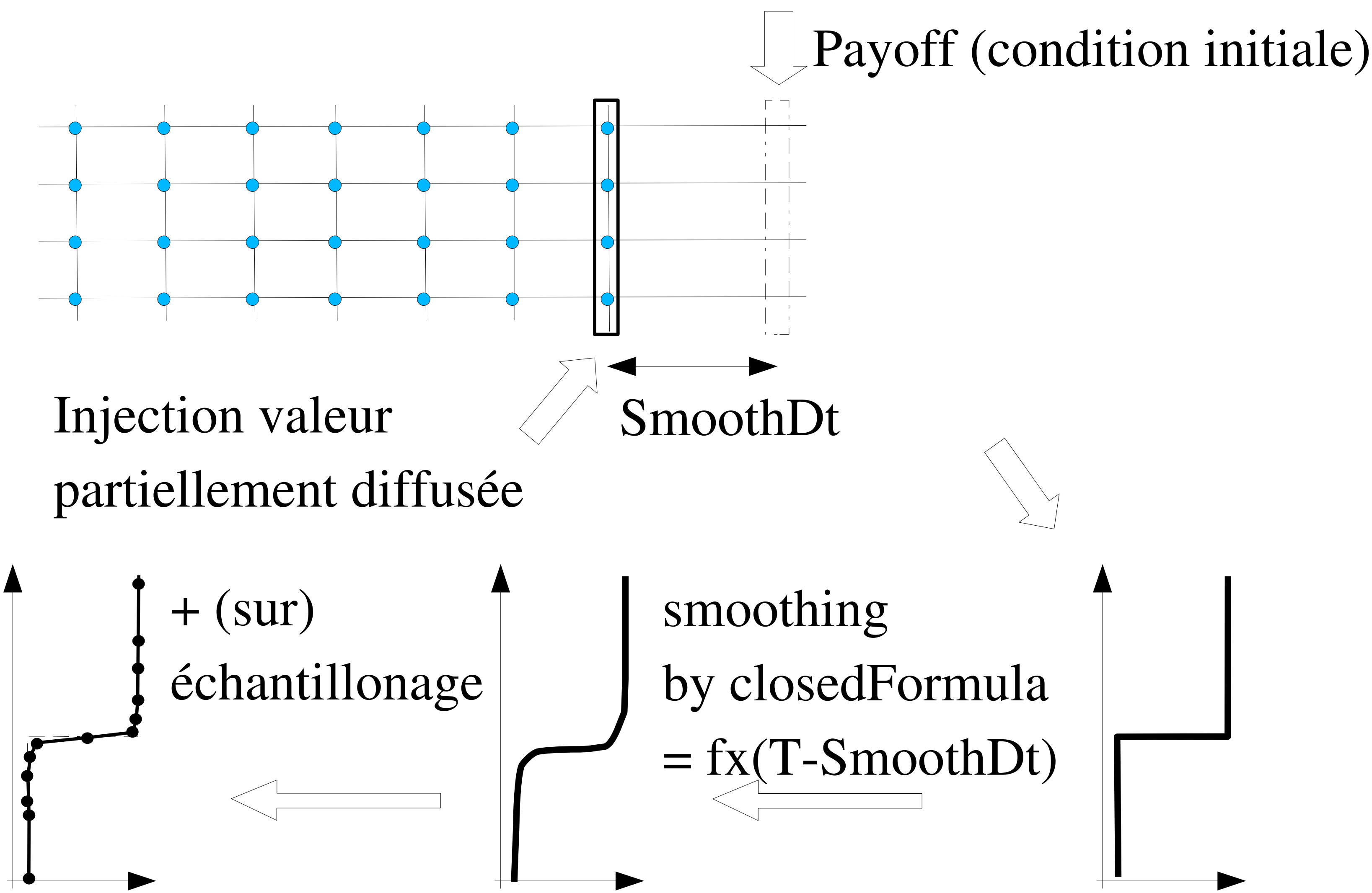
- Discontinuité de Payoff (Binaire)
  - sur-échantillonnage locale
  - utilisation “smoothing” (cf suite)
- Discontinuité sur Barrières (Trigger)
  - pb de convergence (conflit vol / drift)



Exemple de “Smoothing”

- Smooth = fonction de lissage
- pseudo formule fermée, non exacte!

ANNEXE

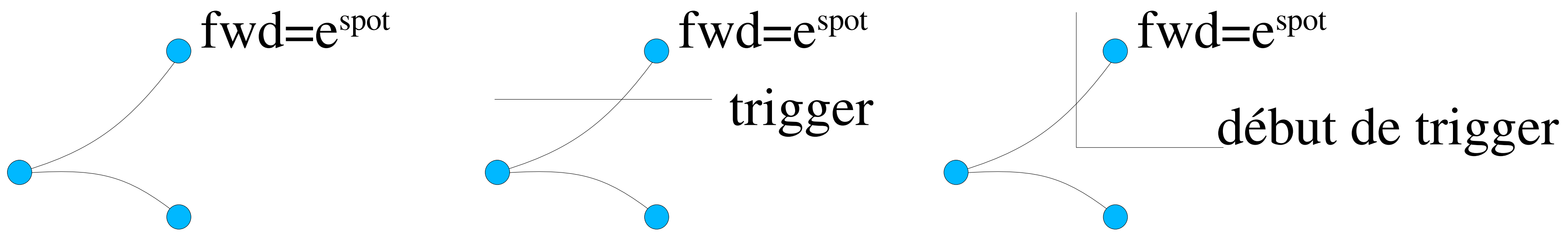


Autres Méthodes Numériques?

- Rappel :
  - Formule Fermée, Monte-Carlo, Intégrale, Transformée de Fourier
- Méthodes Backward:
  - Discret =>
    - Arbre de Cox, Arbre Trinomial…
  - Continus => EDP
    - Différences Finies
    - Eléments Finis

Calcul Numériques - Arbres de Cox

- Arbre de Cox (Binomial) = n*(n-1)/2 points
- Complexité algorithmique < EDP
- Mais
  - les maillages en temps et en espace sont liés
  - calculs couteux d'intersections Triggers – Maille (coût > coût calcul diffusion !!)
  - ... pour un convergence et précision faible



Calcul Numériques - Arbres de Cox

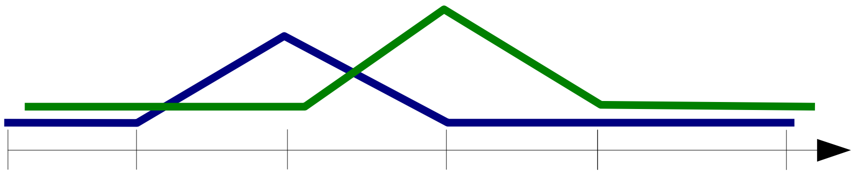
- Exemple d'astuce pour améliorer la convergences des Pricing Cox :
  - [calcul pour N pas + calcul pour (N+1) pas] / 2

Introduction aux Eléments Finis

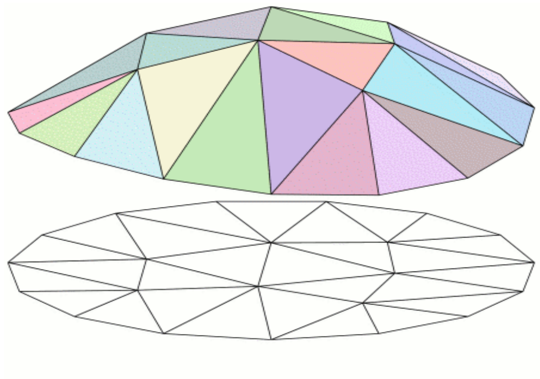
- Approximation d'une fonction f par

$$f \rightarrow g = \sum_{i \in [1..N]} \lambda_i v_i$$

  - v_i famille de fonctions, =0 sauf aux mailles voisines d'un sommet
- Exemples :



  - 1D
  - 2D exemple de décomposition (http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method)



- Théorie: Norme L^2, Espace de Sobolev...

EDP et Eléments Finis

- Application aux EDP :

$$a+bu+c\frac{du}{dx}+d\frac{d^2u}{dx^2}=0$$

- Forme variationnelle:

$$\forall v_i, \int_{x\in E}\left(a+bu+c\frac{du}{dx}+d\frac{d^2u}{dx^2}\right).v_i dx=0$$

- Intégrale par morceaux + par partie...

$$\int_{x\in E_i}\frac{du}{dx}.v_i dx=\underbrace{[u.v]_{ximin}^{ximax}}_{=0!!}-\int_{x\in E_i}u.\frac{dv_i}{dx}dx$$

- Pré-calcul de coefficients

$$m_{ij}=\int v_i.v_j dx,\quad n_{ij}=\int v_i.\frac{dv_j}{dx}dx\ldots$$

-

- => 1 Step dt (implicit/explicit..) = inversion d'une matrice NxN

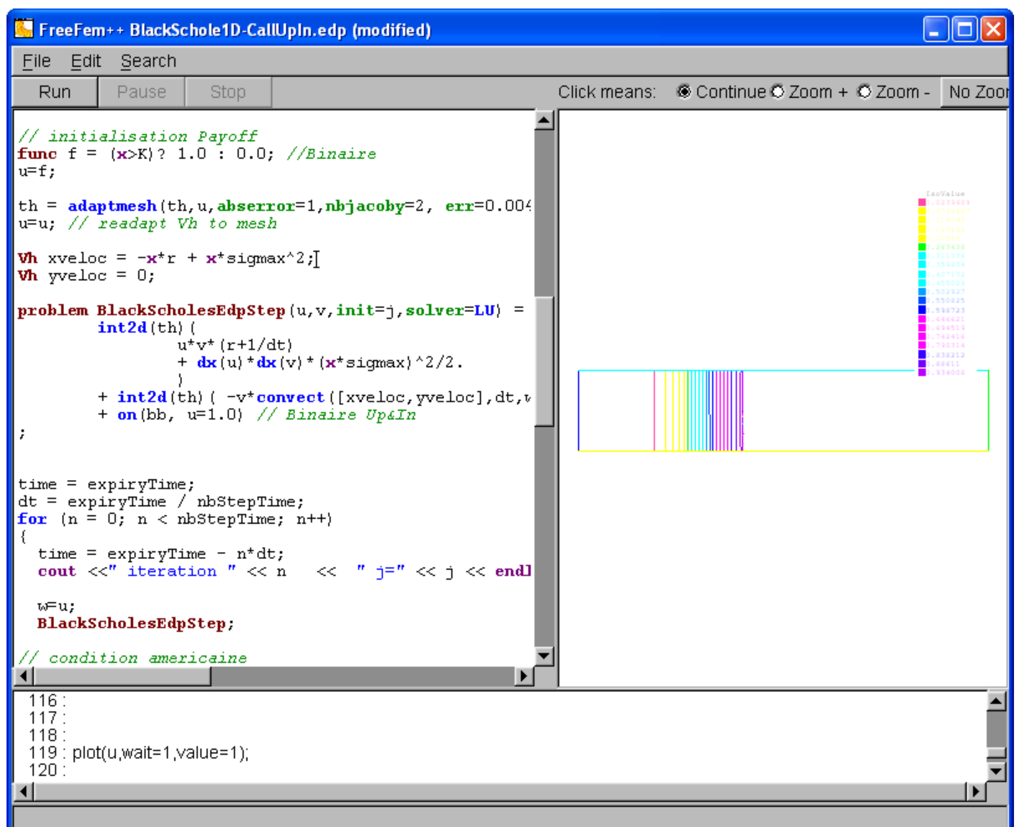
SUNGARD

Avantages/Inconvénients

- Avantages
  - Solutions plus précises, meilleure convergence?
  - maillage auto-adaptatif, etc...
  - Plus adapté pour les Triggers ?
  - Très nombreux logiciels existants
  - surtout dans les domaines de la mécanique (des matériaux et des fluides)
  - 2D et 3D très répandus
- Inconvénients
  - plus complexes

Logiciels FEM : FreeFem++

- Logiciel Gratuit, Intéractif, 2D, Graphique, Script pseudo C++.... simple
- Remarques: nombreux autres solutions 3D / Fortran, C++, peu en Java



SUNGARD

Conclusion Problèmes Numériques

- Les problèmes de convergence sont très importants, surtout pour les analyses de risques
- Une savante cuisine
  - Un peu de théorie
  - Un peu de pratique
  - Compromis d'efficacité
  - Problèmes d'arrondis 32-64 bits
  - Optimization des Implémentations (pipeline fpu, loop unroll, grid computing, etc...)
- Différences Finie ou Elément Finis...

SUNGARD

Sous-Plan : Partie II

- Discrétisations Numériques
- Exemples de Décomposition d'Options
  - Cas des options européennes, quanto, américaines, triggers...
  - Démo animée (FreeFem++), Graph 3D
  - introduction partie 3

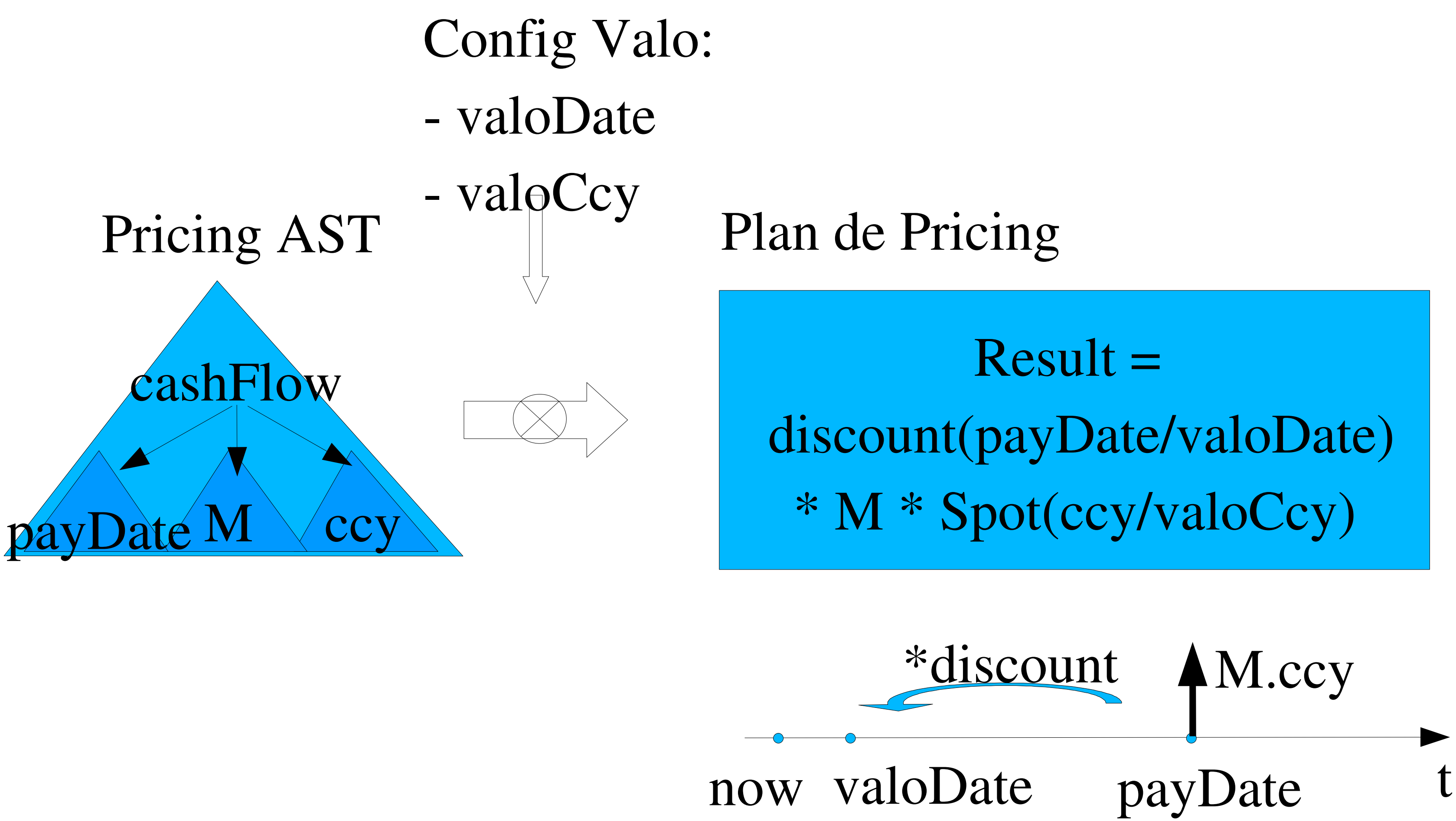
Analyses de Cas d'Options

- Analyse d'exemples + graph / démo 3D
  - cas des Cash Flow
  - cas des Options Européennes
  - cas des Options Européennes Complexes
  - cas des Options Américaines
  - cas des Options à Limites
  - ...
- Remarques:
  - Introduction notion de plan de Pricing
  - Introduction pattern Visitor (Cf présentation 3/4)

SUNGARD

Cas du Cash Flow

- CashFlow = pay “M” amount of “ccy” at date “payDate”
- Pricing = discount only

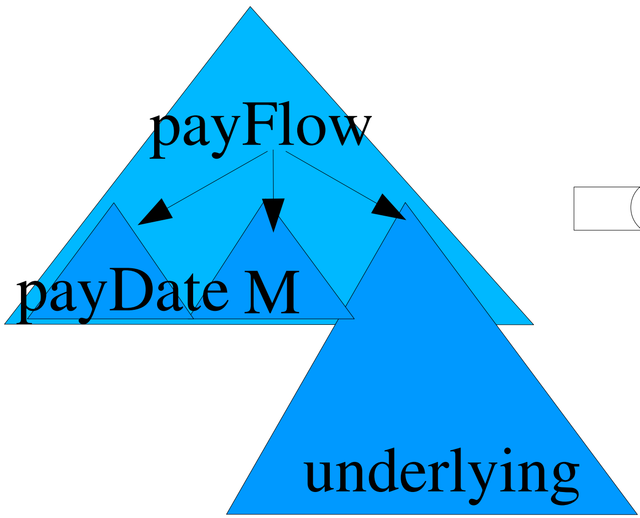


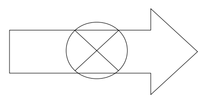
SUNGARD

Cas du Flux en Général

- pay Underlying != currency

Pricing AST



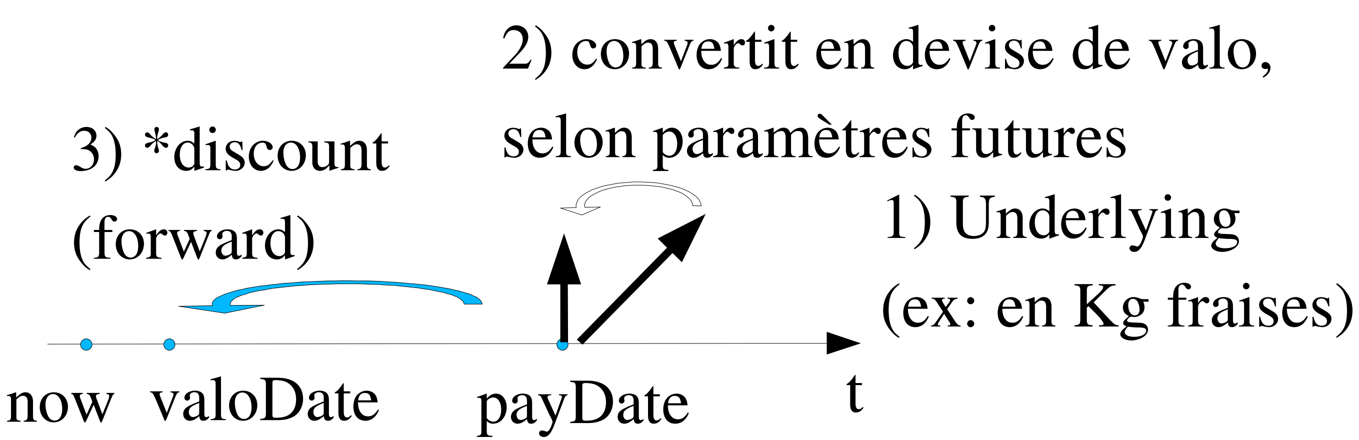


Plan de Pricing

Step 1 = get/compute underlying

Step 2 = convert in ccy at forward Date using forward params

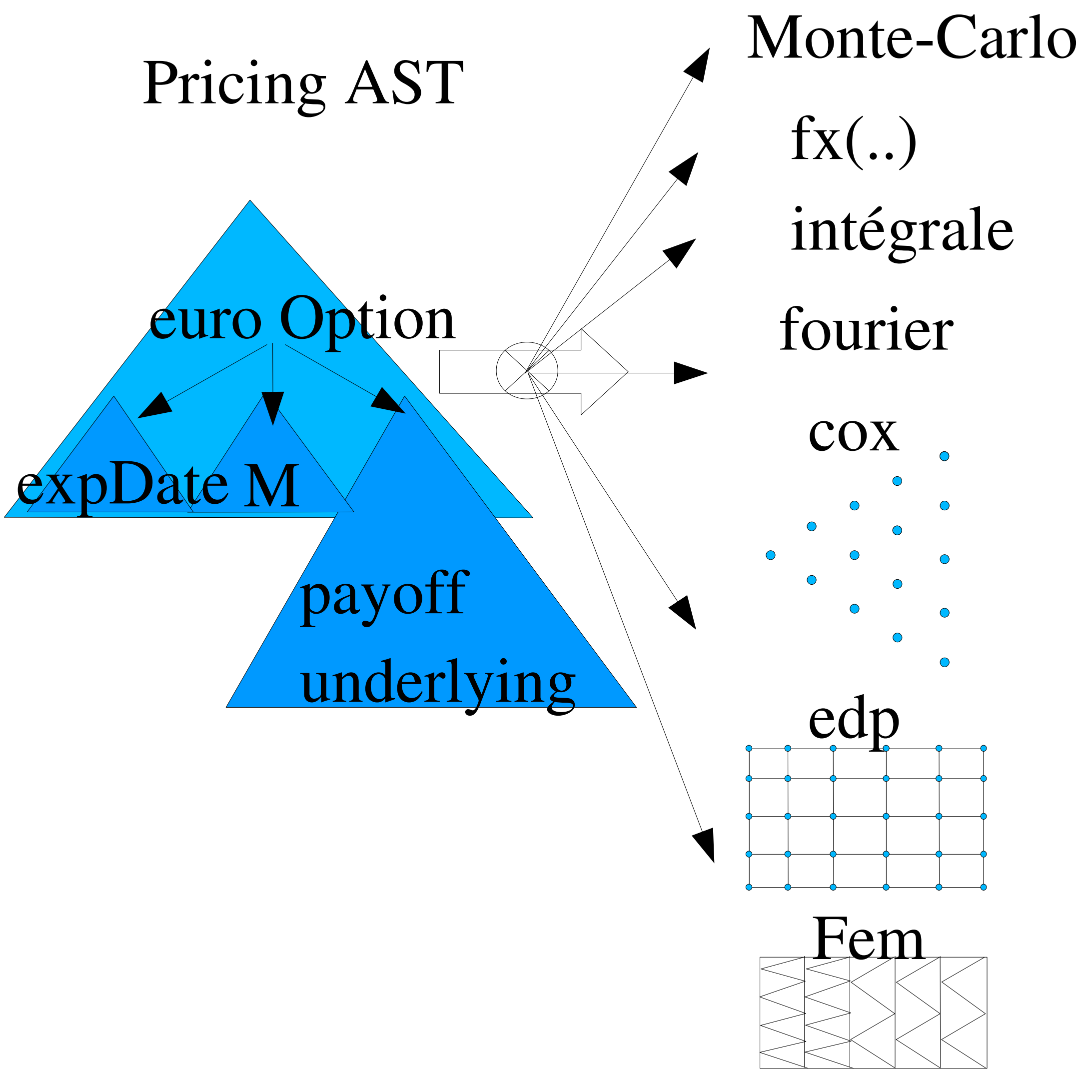
Step 3 : Result = discount(payDate) * M * ForwardPrice(underlying)



SUNGARD

Cas des Options Européennes

- pay at delivery date an underlying computed from variables fixed at expiry



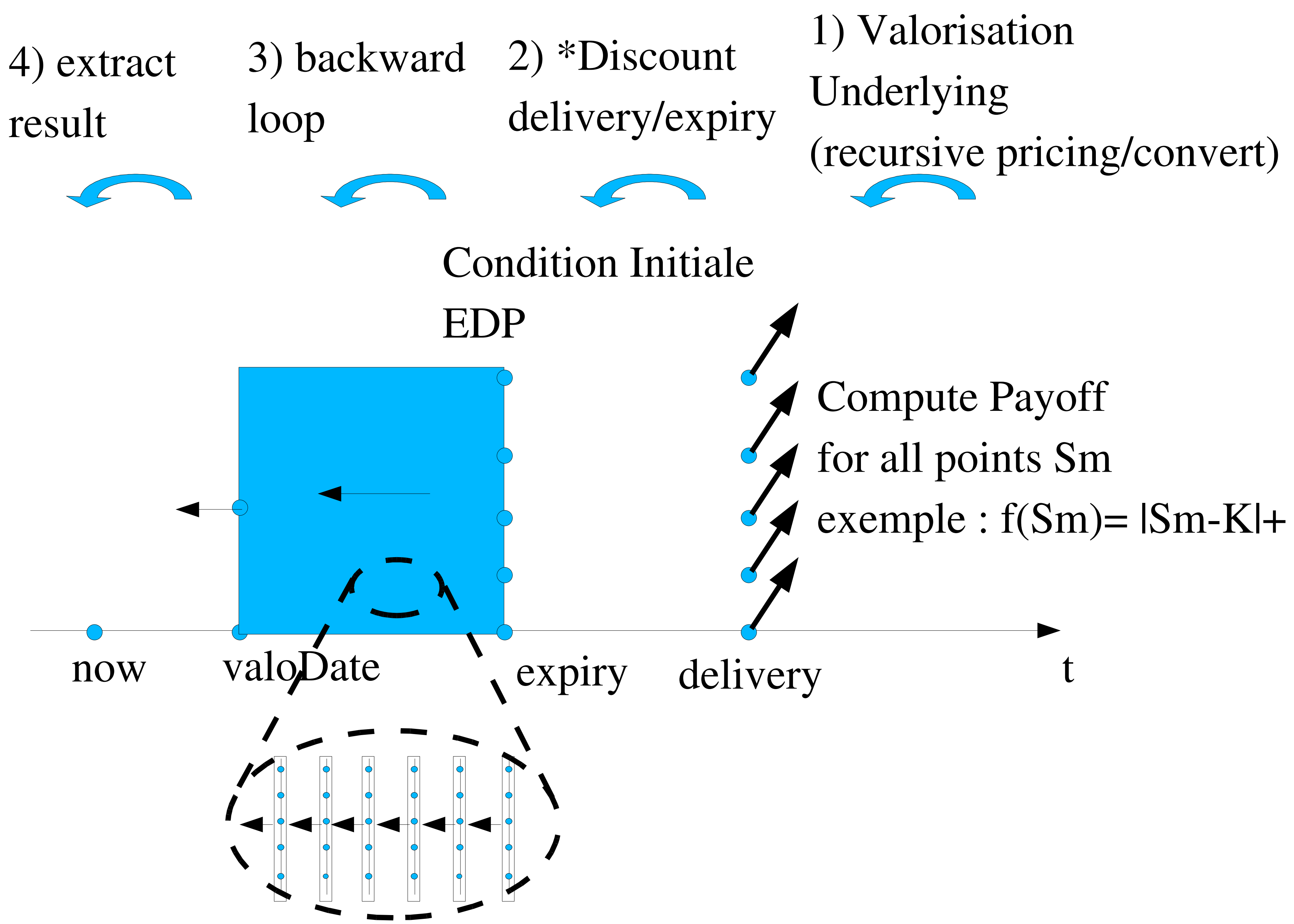
- Compute variables for Fixing
(dependency analysis:
mono ccy, mono brownien, quanto...)
- check/decompose Payoff Expr
- choose method

Monte-Carlo...

Formules Fermées...

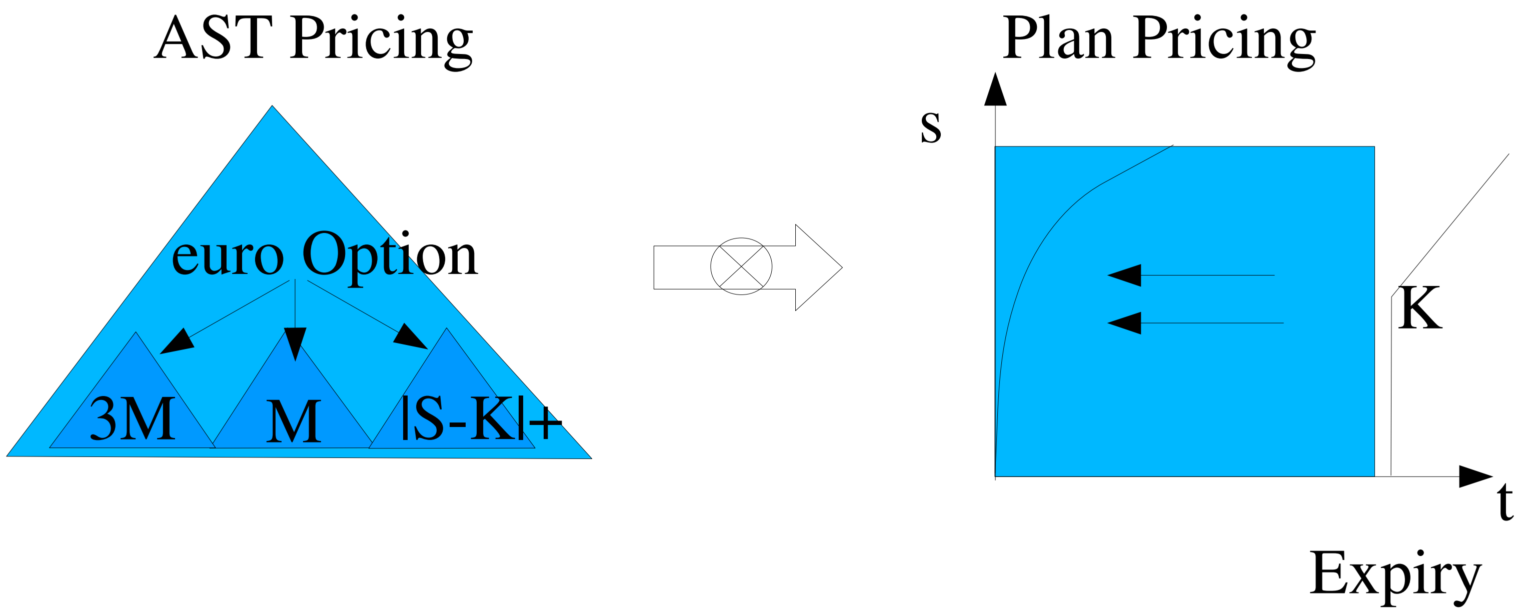
Diffusion Backward

Représentation Graphique



SUNGARD

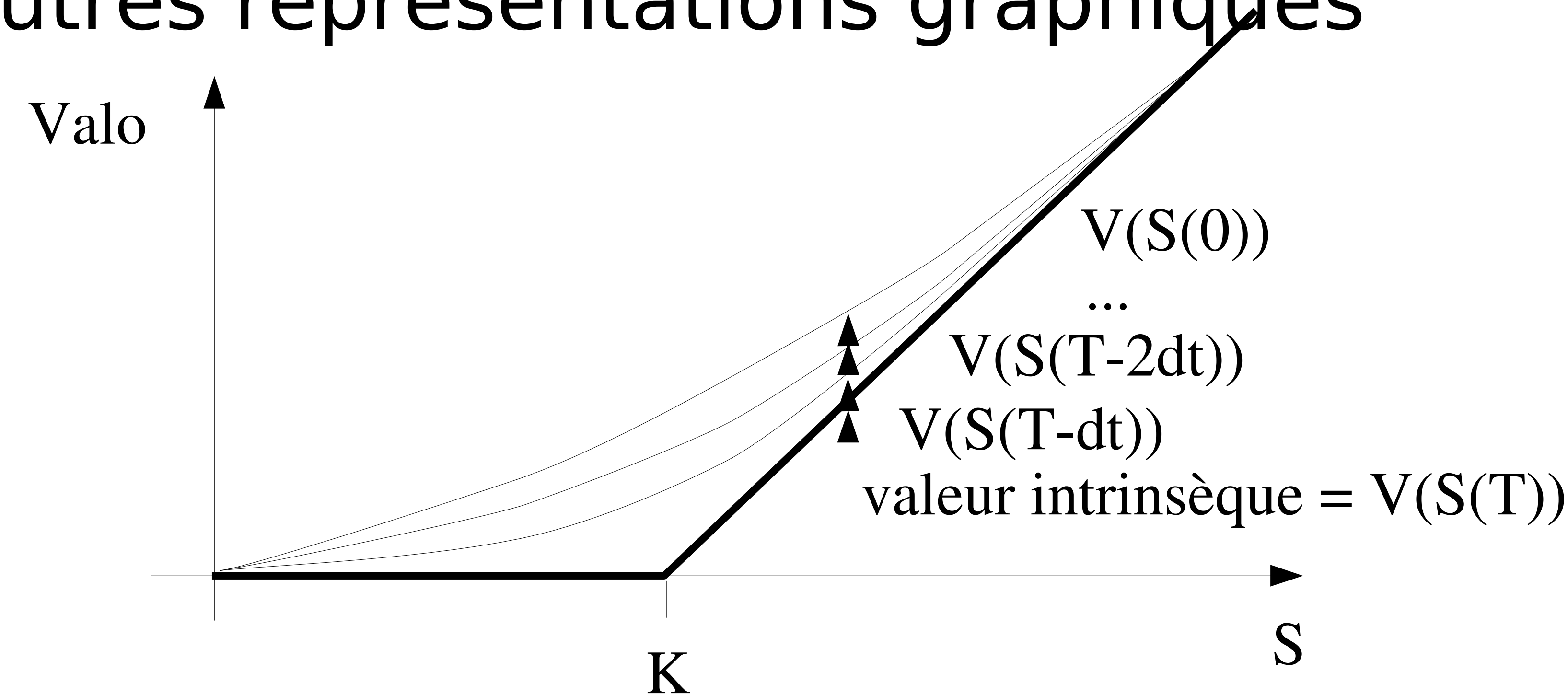
Représentation Graphique

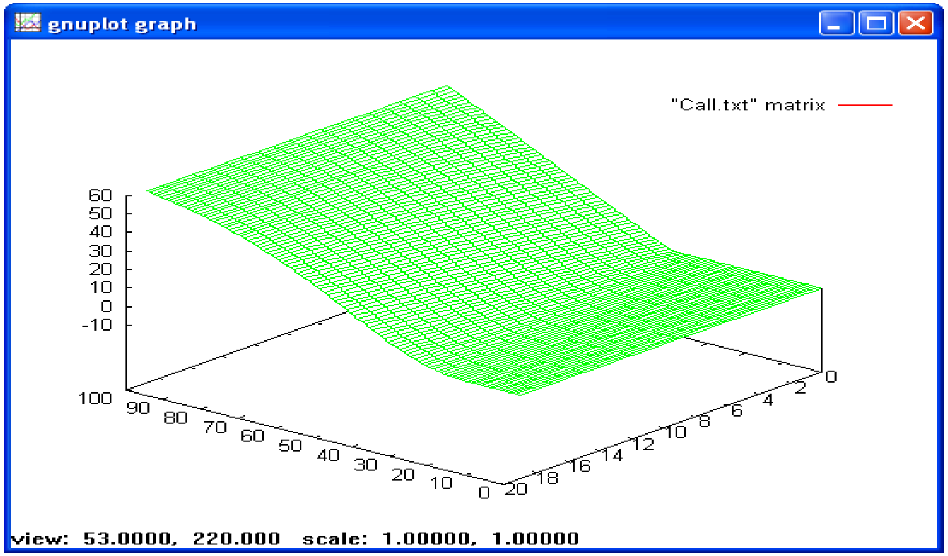


SUNGARD

Graph de Diffusions

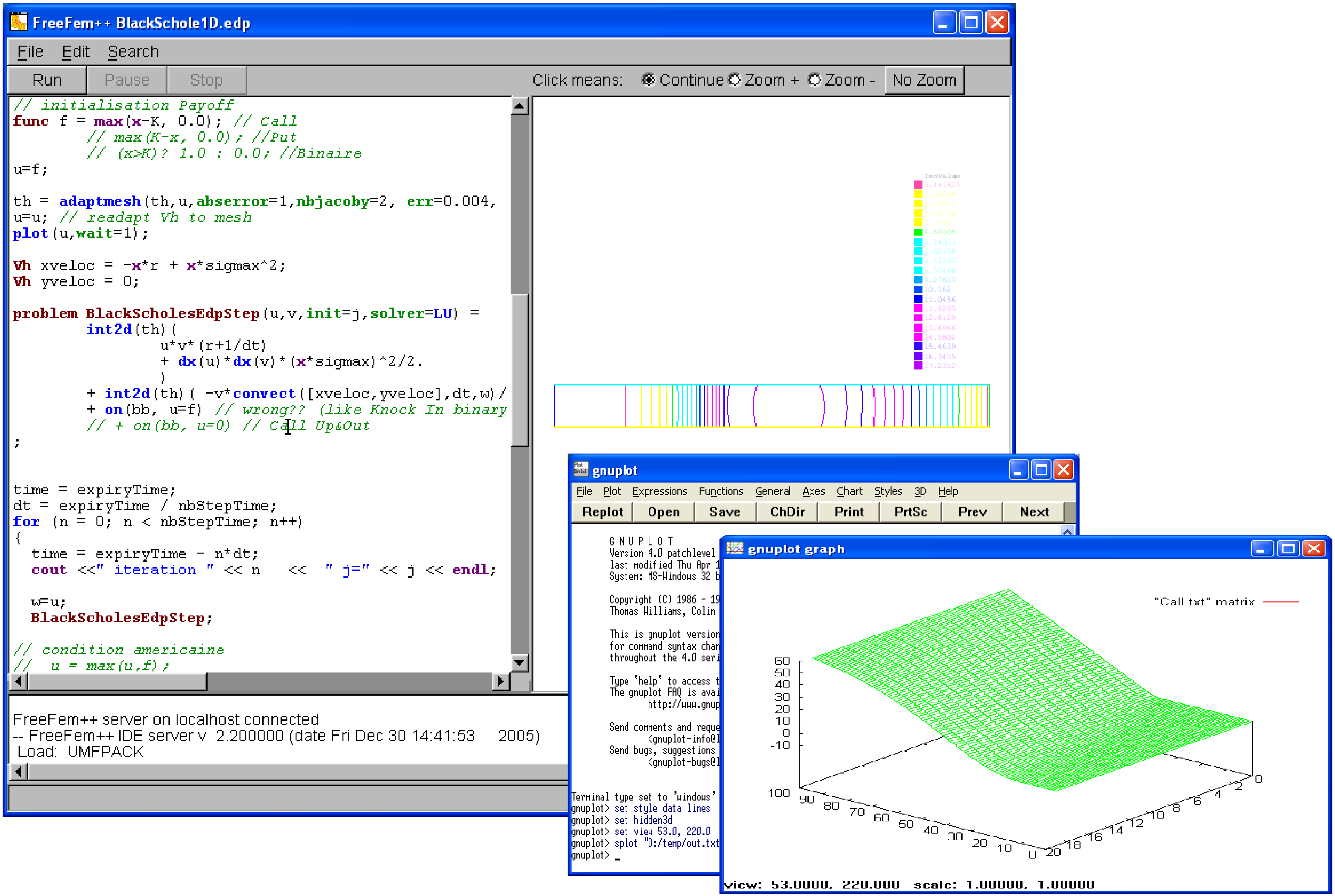
- Autres représentations graphiques





SUNGARD

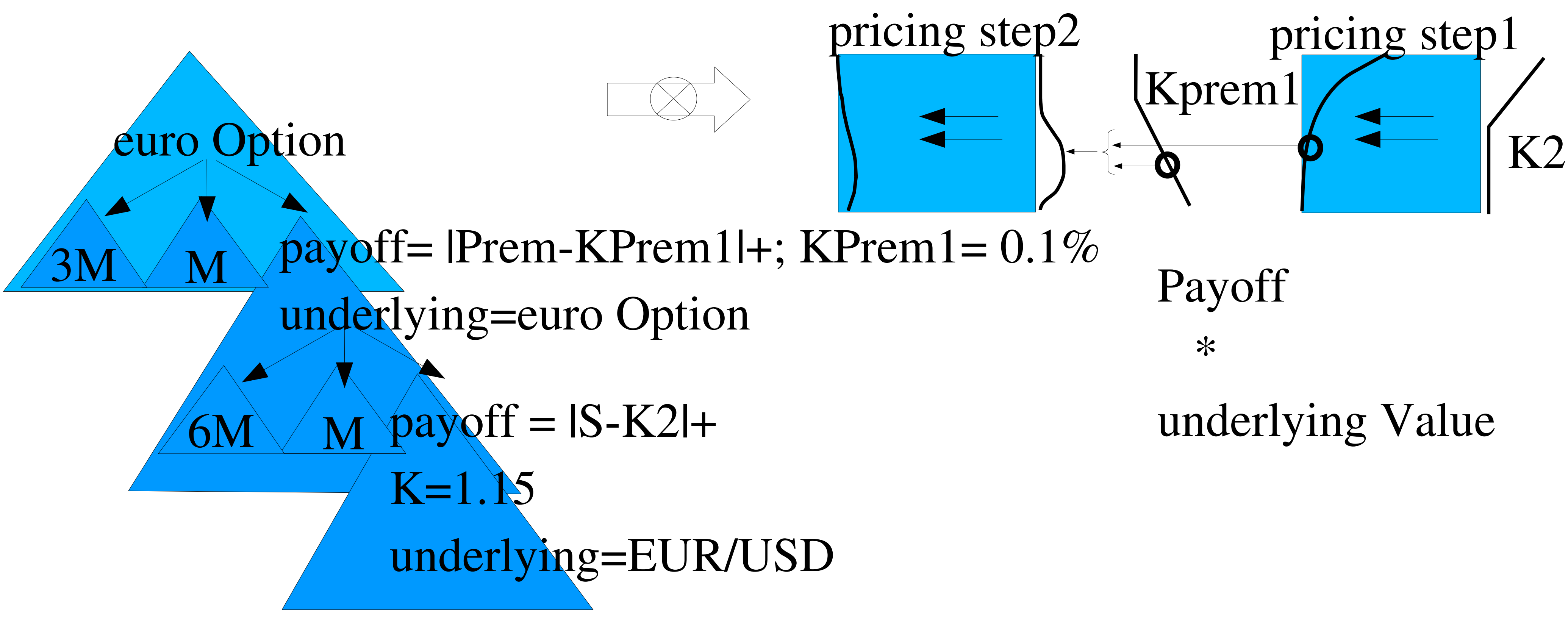
Démo avec FreeFem++ / Gnuplot



SUNGARD

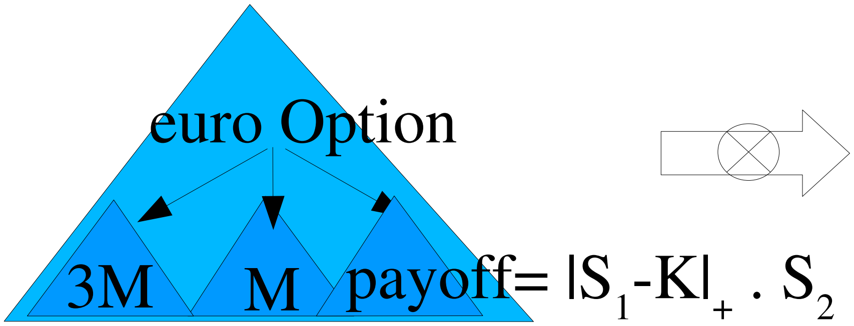
Options Européennes Complexes

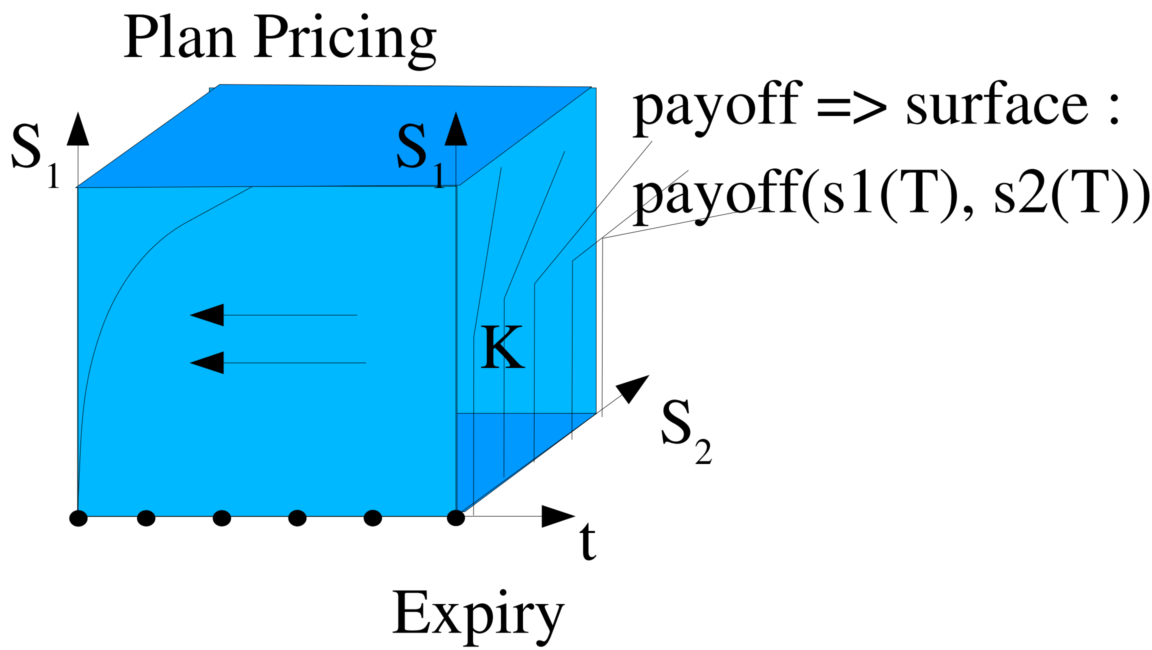
- Exemple : Option sur Option
  - option “mère” put 3M K=0.1%
  - sur sous-jacent = Call 6M EUR/USD K2=1.15



Options Européennes Complexes(2)

- Exemple 1 : Option Quanto
  - payoff multi sous-jacent: $|S_{USD/JPY}-K|_+.S_{EUR/USD}$
- Exemple 2 : Option Basket
  - payoff = $|\max(S1,S2) - K|_+$





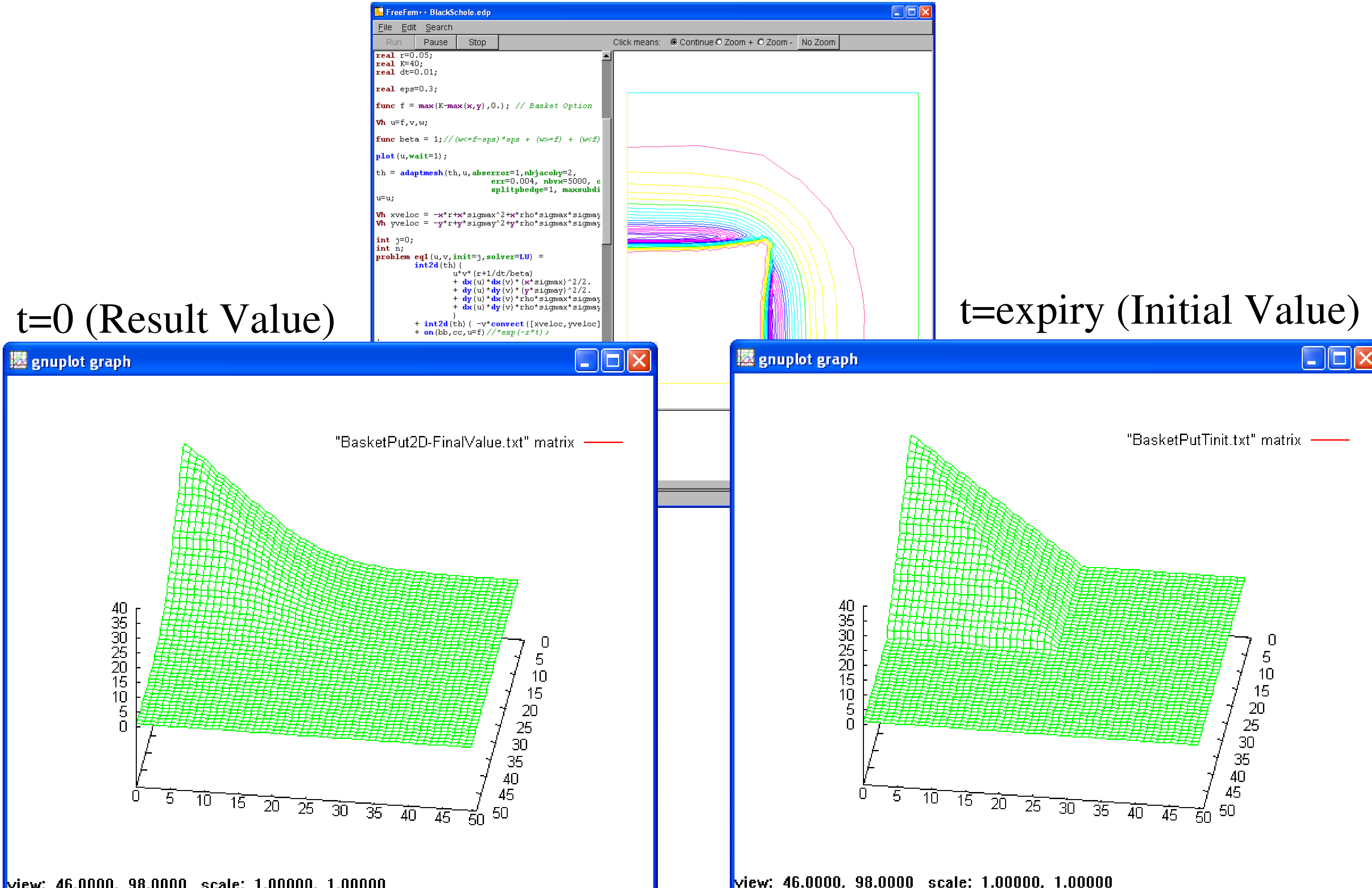
Slice 2D: S1xS2...

diffusion=2 volatilités + corrélation

Démo Basket Option (Payoff 2D)

t=0 (Result Value)

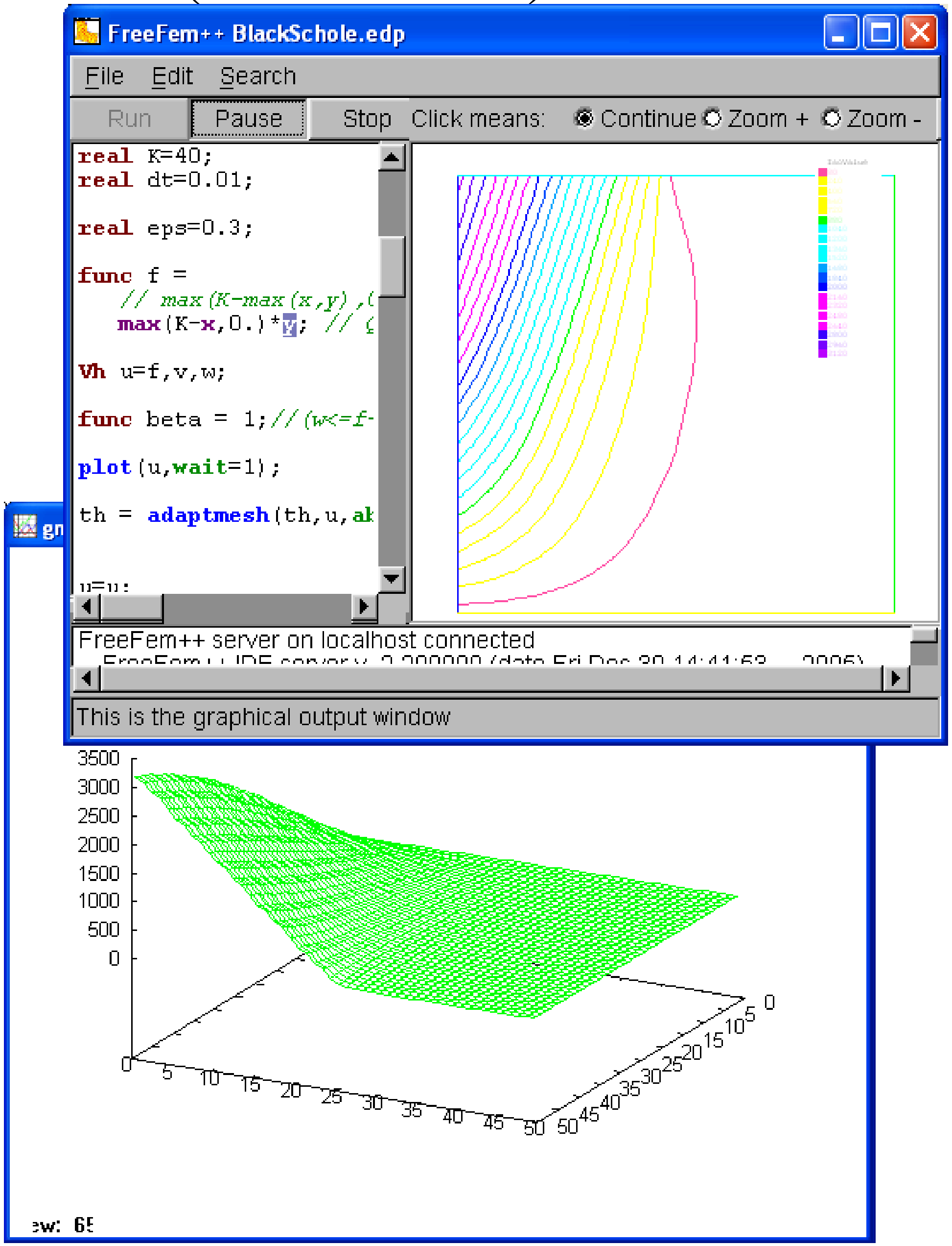
t=expiry (Initial Value)



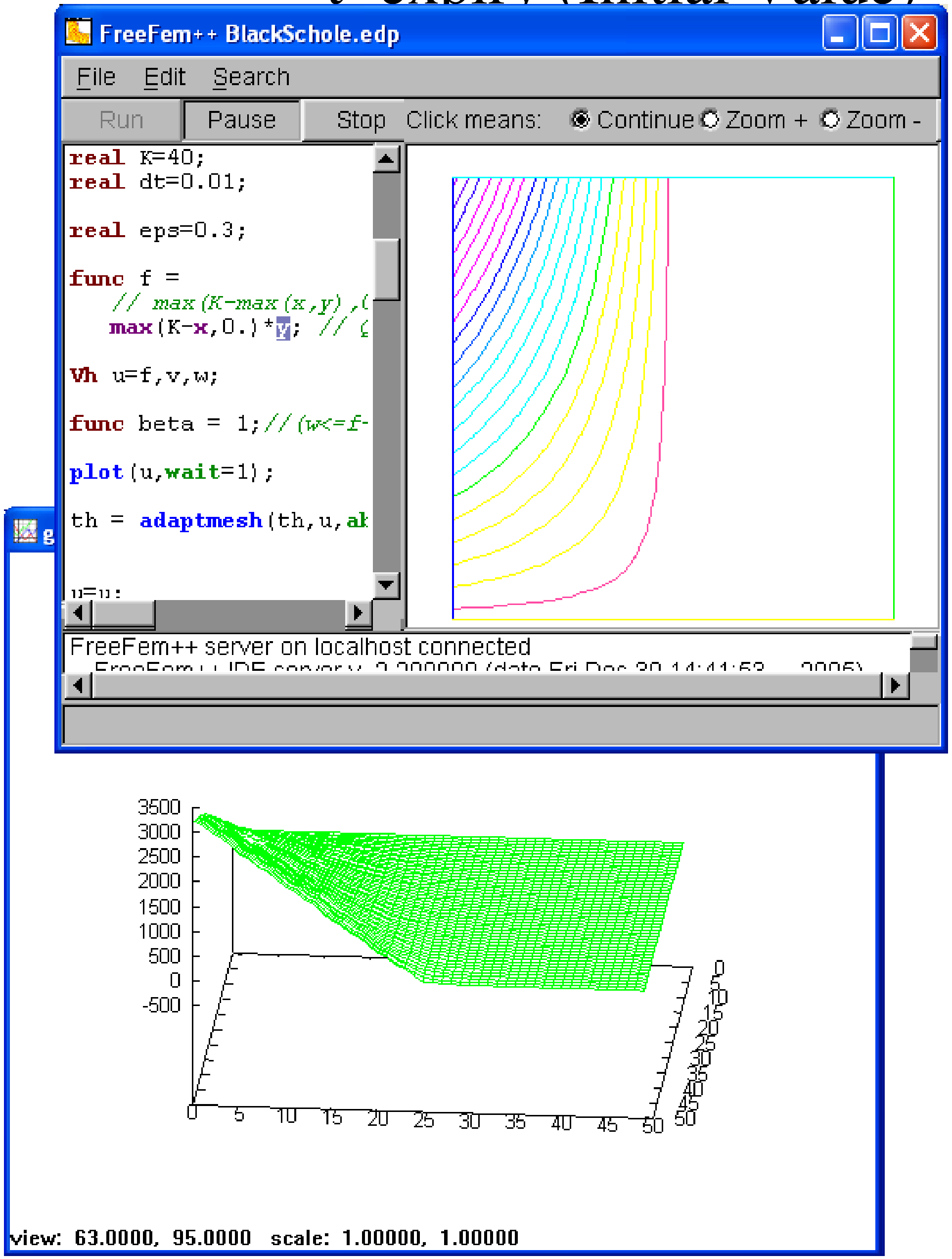
SUNGARD

Démo Quanto Option (Payoff 2D)

t=0 (Result Value)



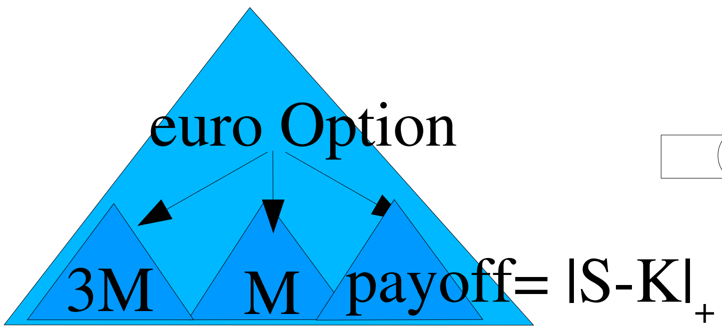
t=expiry (Initial Value)

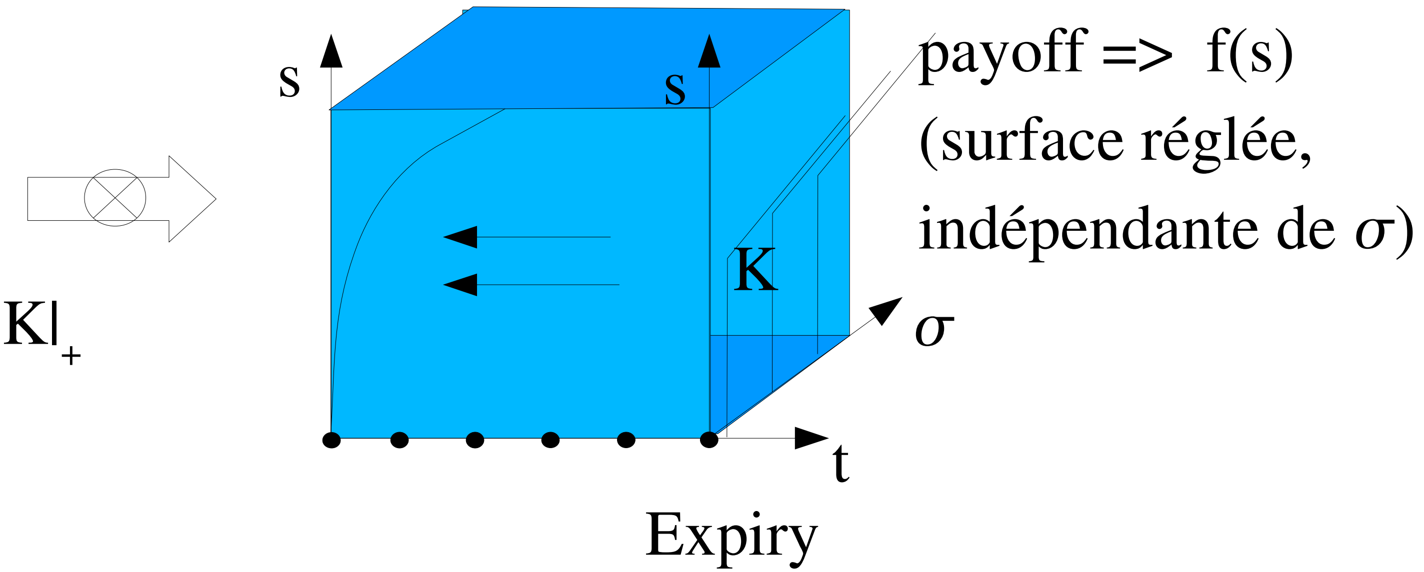


SUNGARD

Remarque : Modèle Multi-Brownien

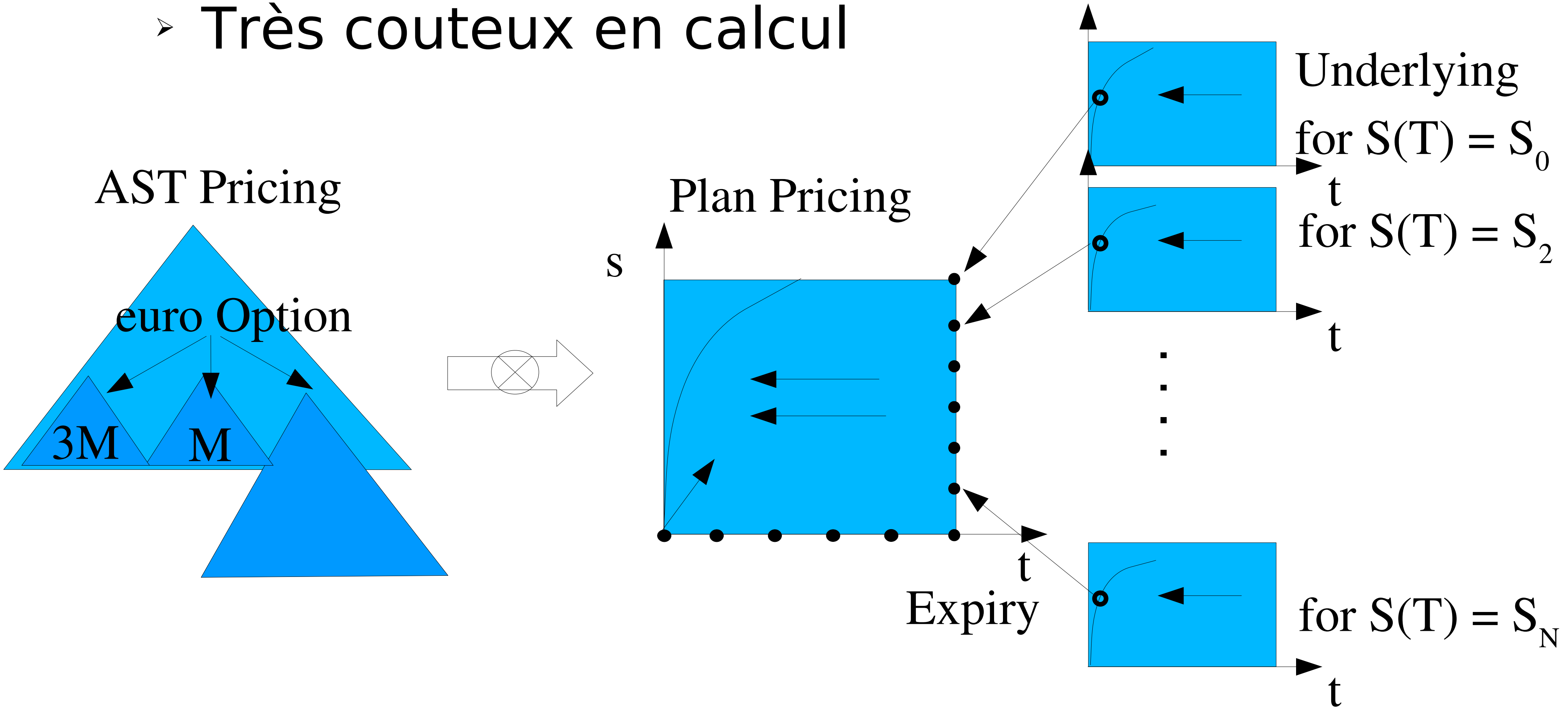
- Option Européenne simple + Multi-Brownien
  - Exemple: modèle vol stochastique
  - => Slice 2D = Spot x Vol





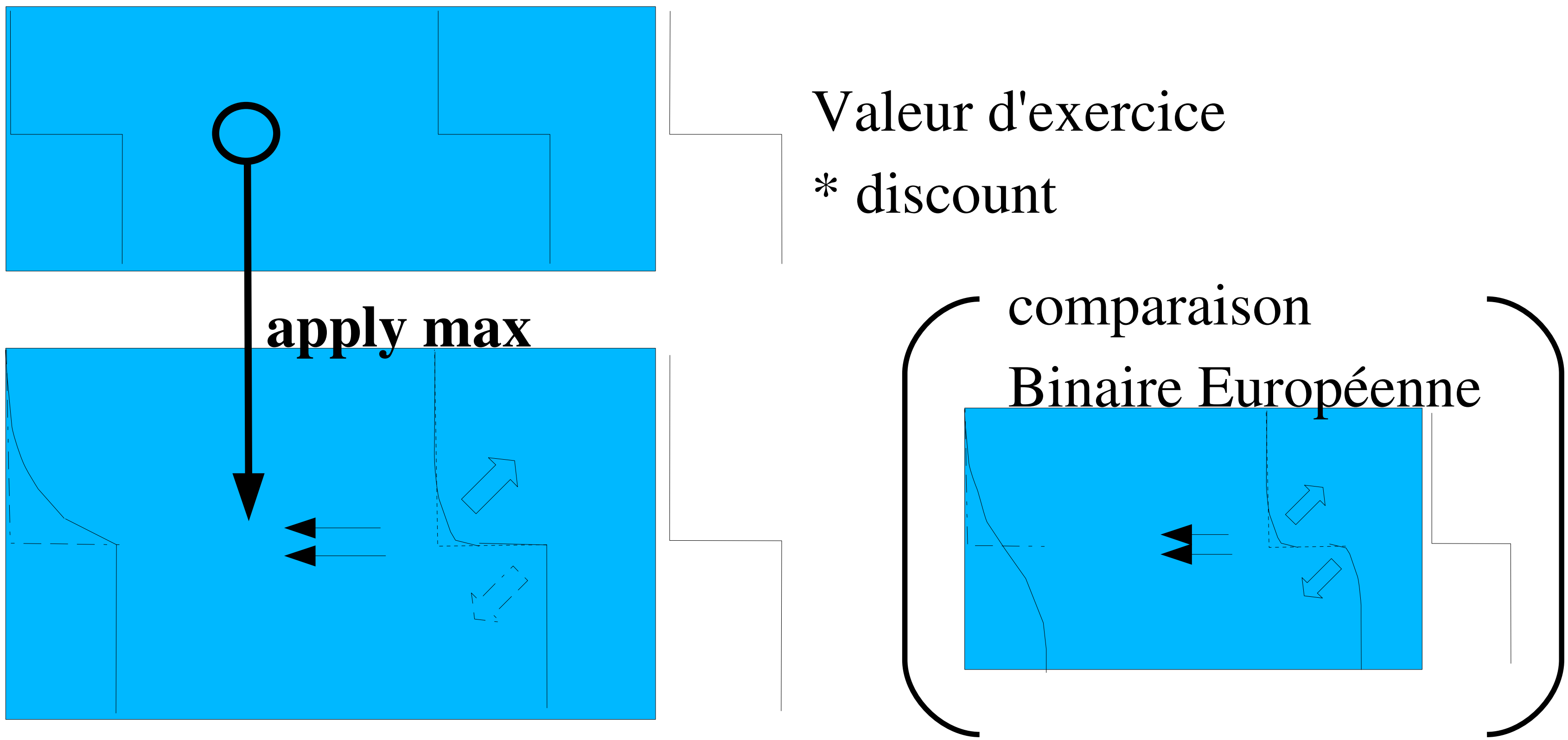
Options Européenes Complexes (3)

- Dans le cas le plus général
  - Complexe
  - Très couteux en calcul



Cas des Options Américaines

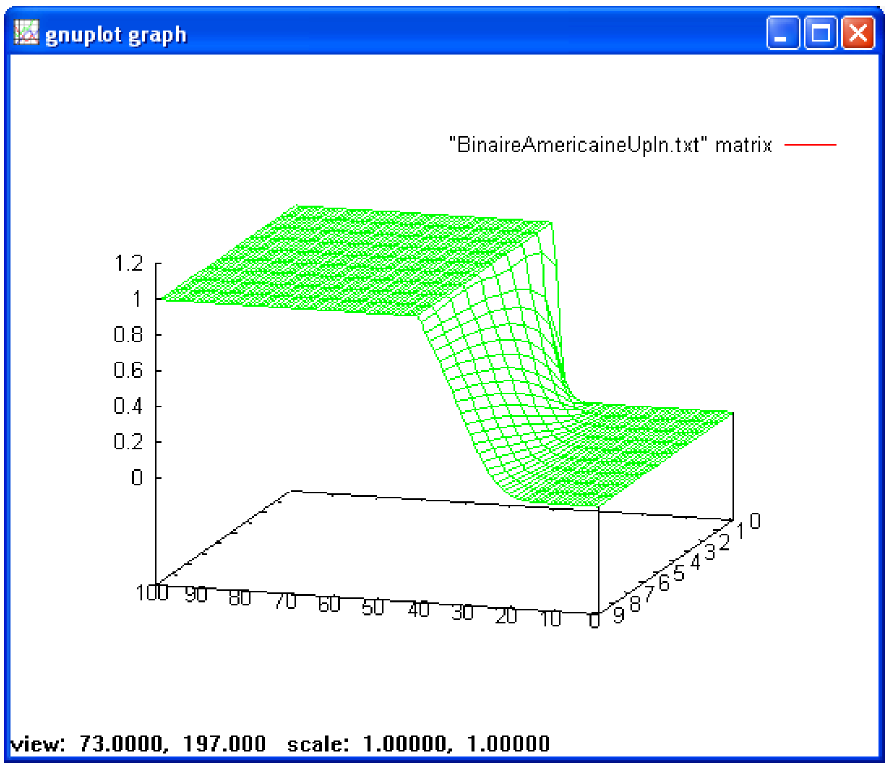
- Exerçable à tout moment
- Idem backward euro + à chaque instant :
  - V(t,s) = max(V(t,s), VIntrinsèque(s))
- Exemple : Binaire Américaine



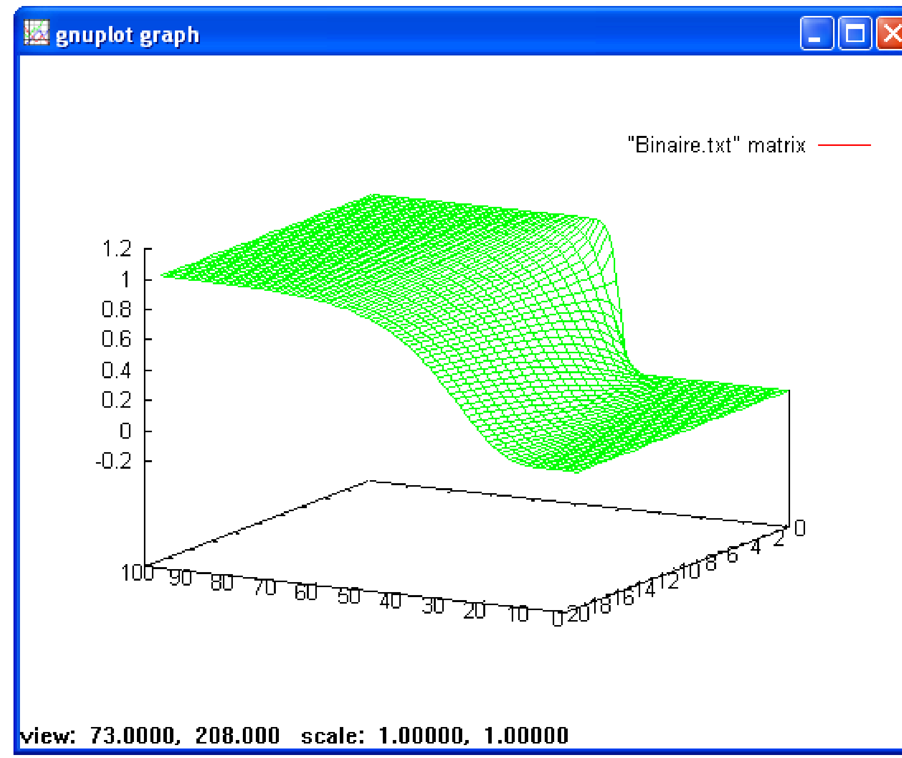
SUNGARD

Graph 3D Option Américaine

Binaire Américaine

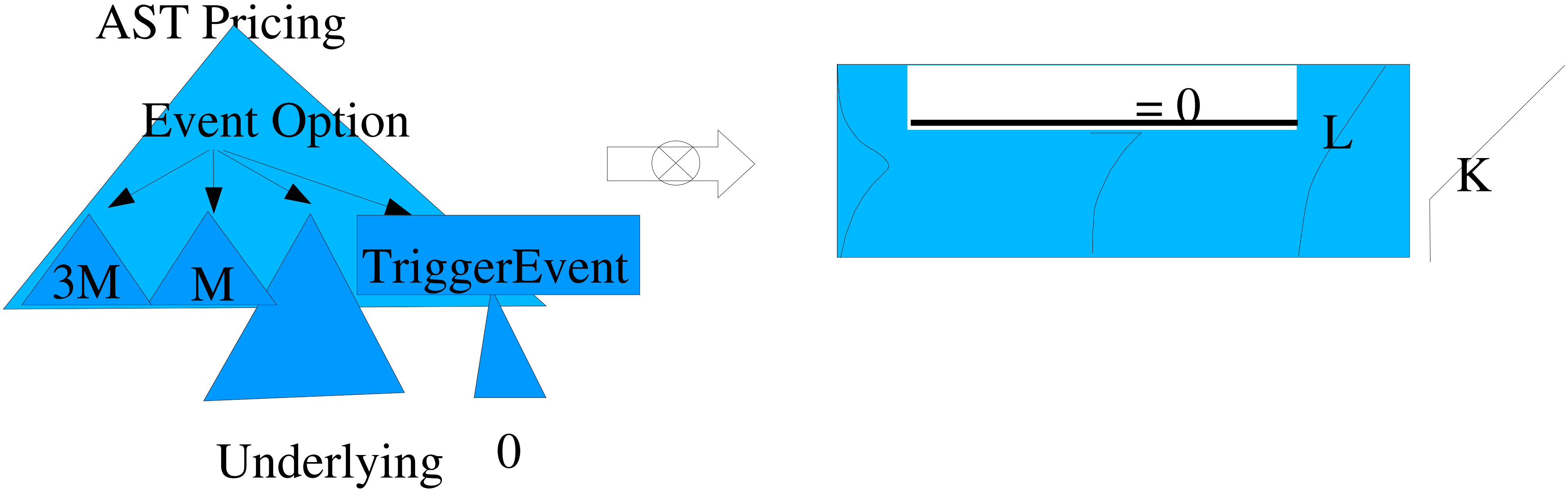


Comparaison Binaire Européenne



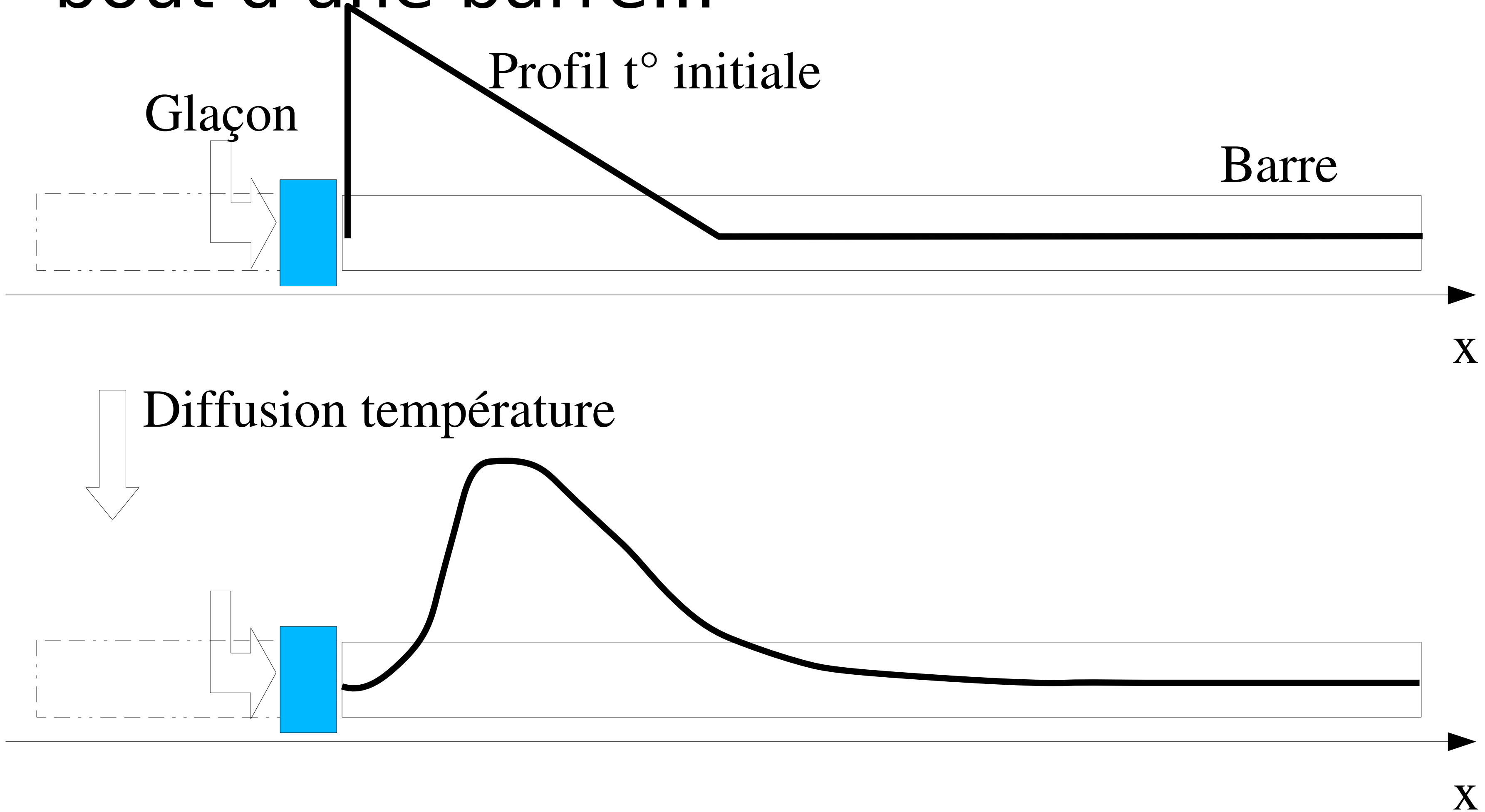
Cas des Options à Limites

- Exemple : Call Up & Out
  - Si le Spot atteint la barrière, l'option meurt (KnockOut)



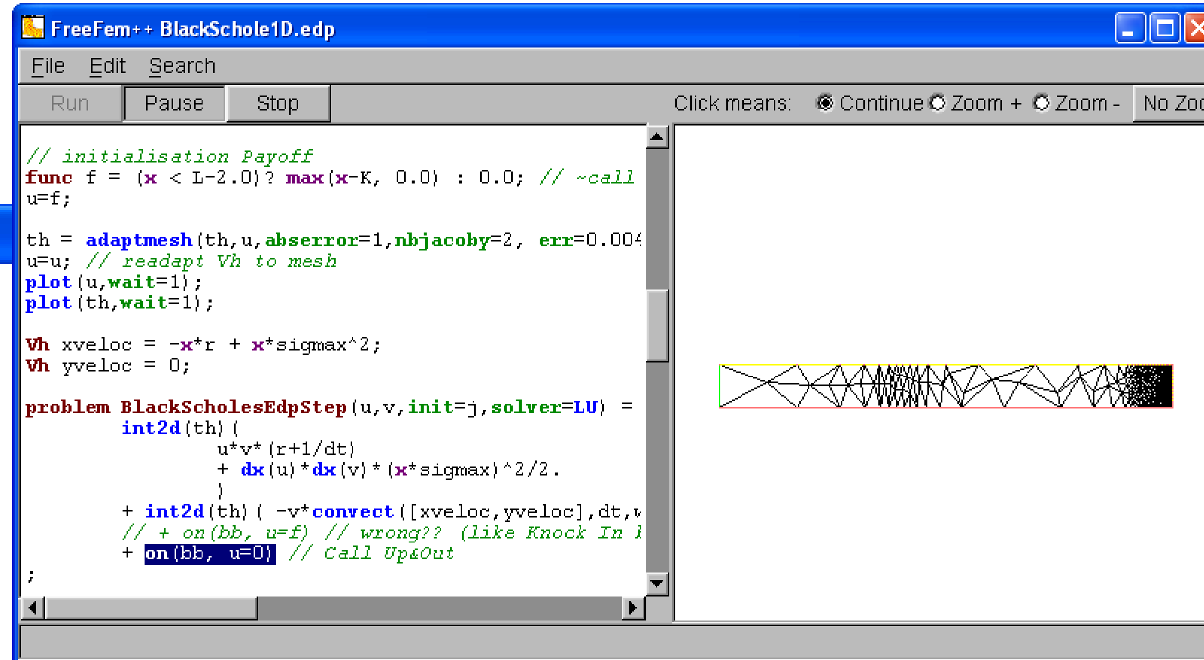
Remarque: Analogie Eq de la Chaleur

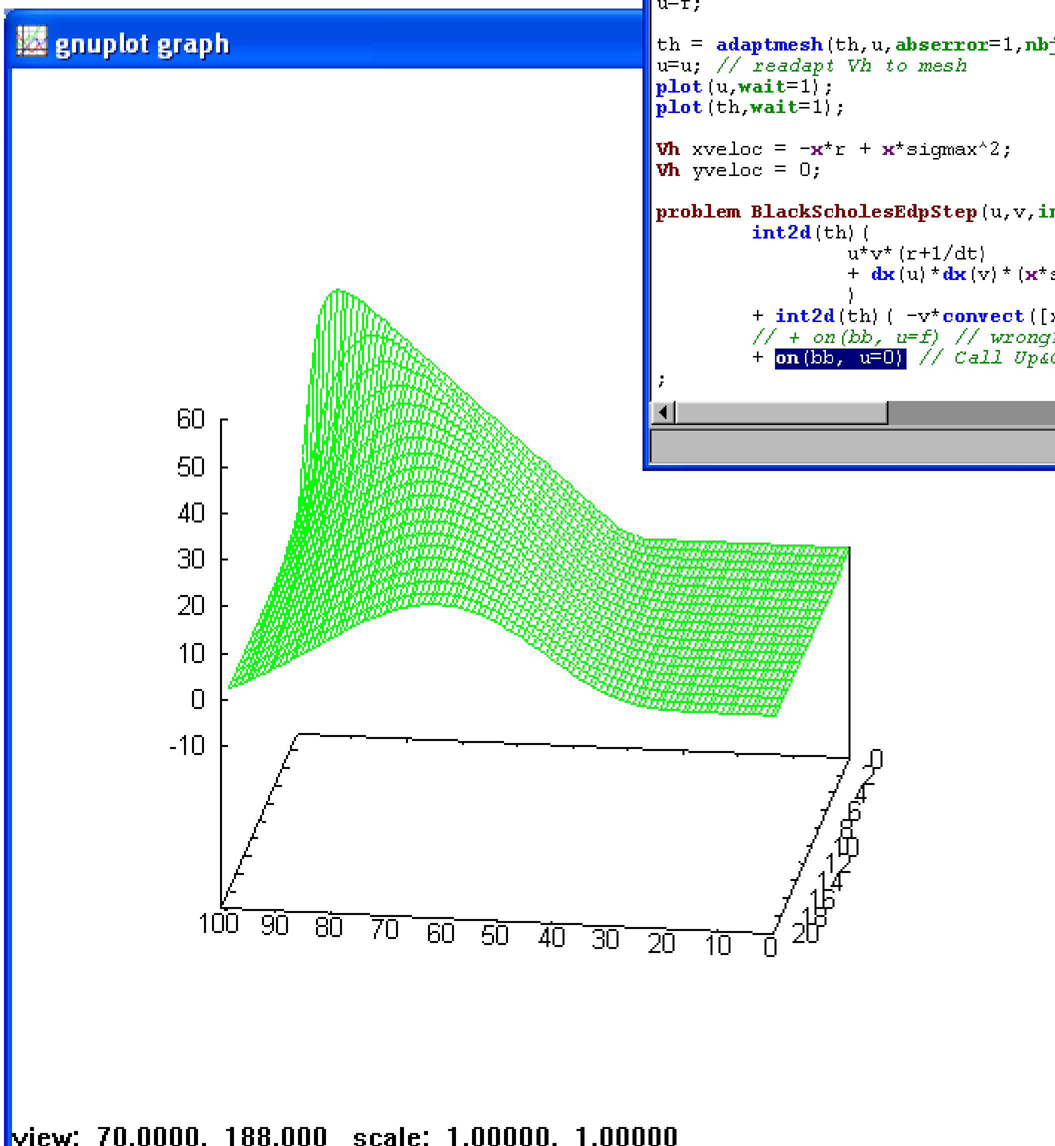
- Condition Limite de type Dirichlet, V=0
- Idem application d'un glaçon à 0°C sur bout d'une barre...



SUNGARD

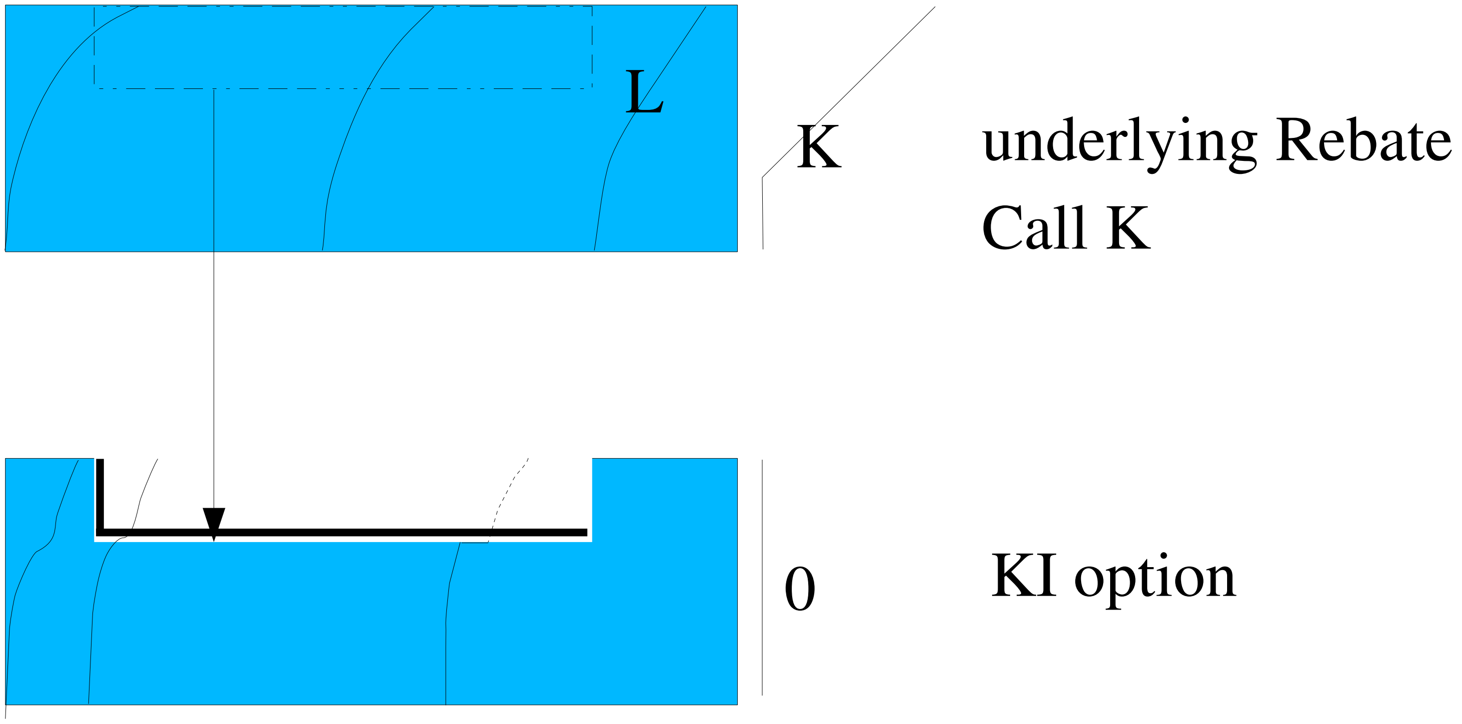
Graph 3D Option Call Up&Out





Options à Limite Knock In

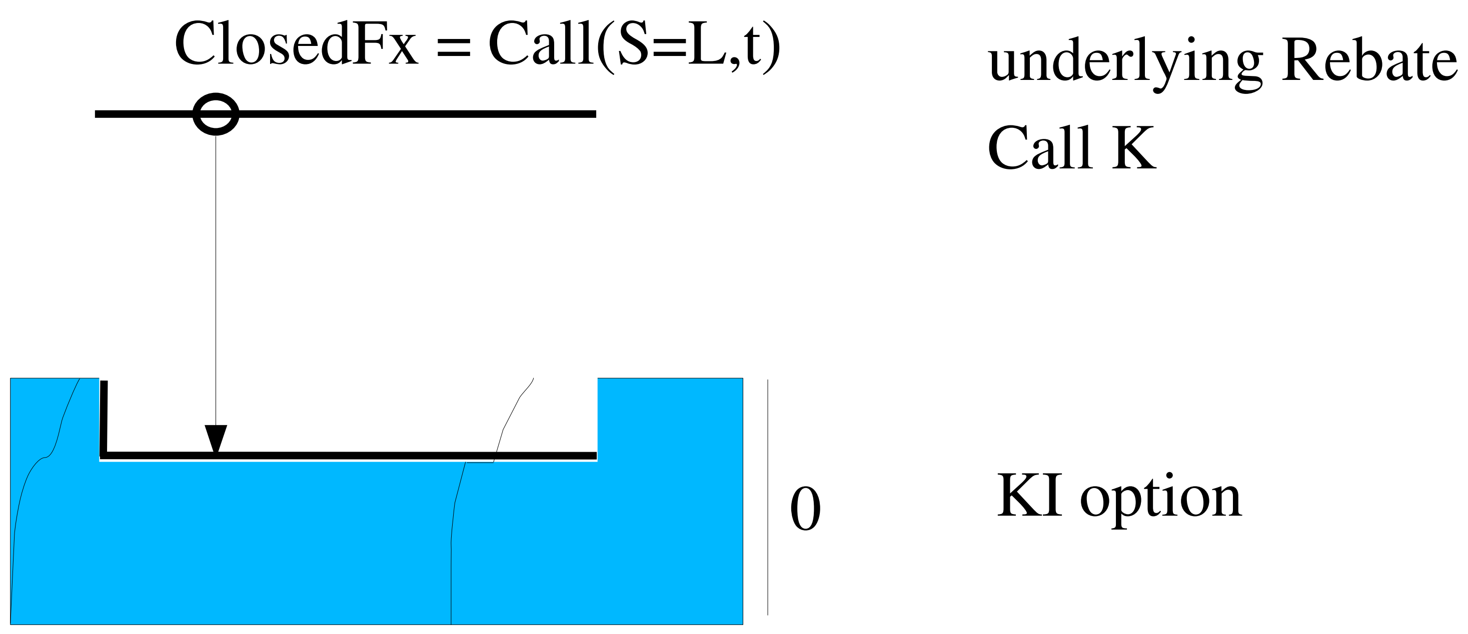
- Exemple : Call Up & In
  - payoff = 0, mais Rebate = Call si Kock In



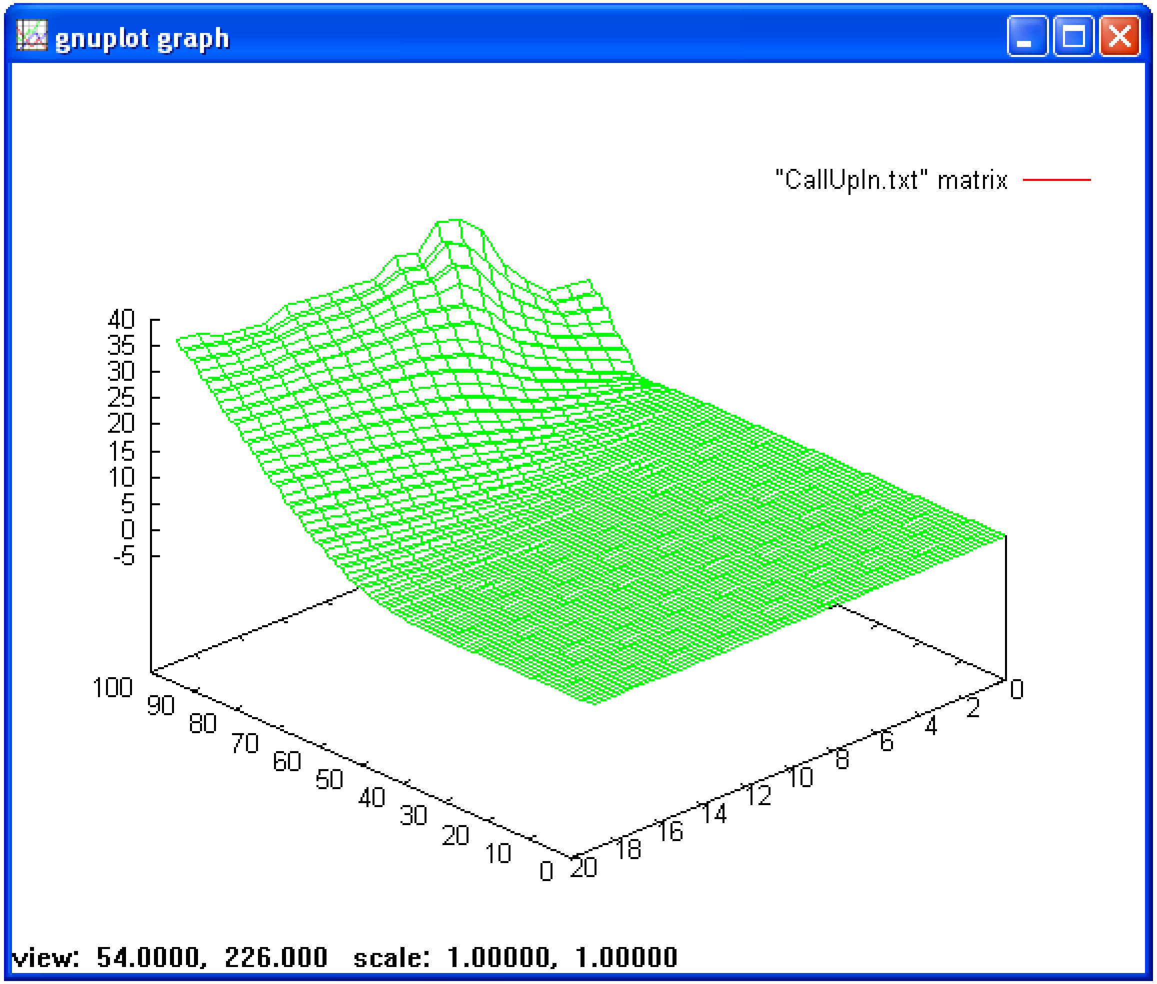
SUNGARD

Simplification des Options KI

- Dans le cas où le Rebate admet une formule fermée, le plan d'exécution est plus simple...



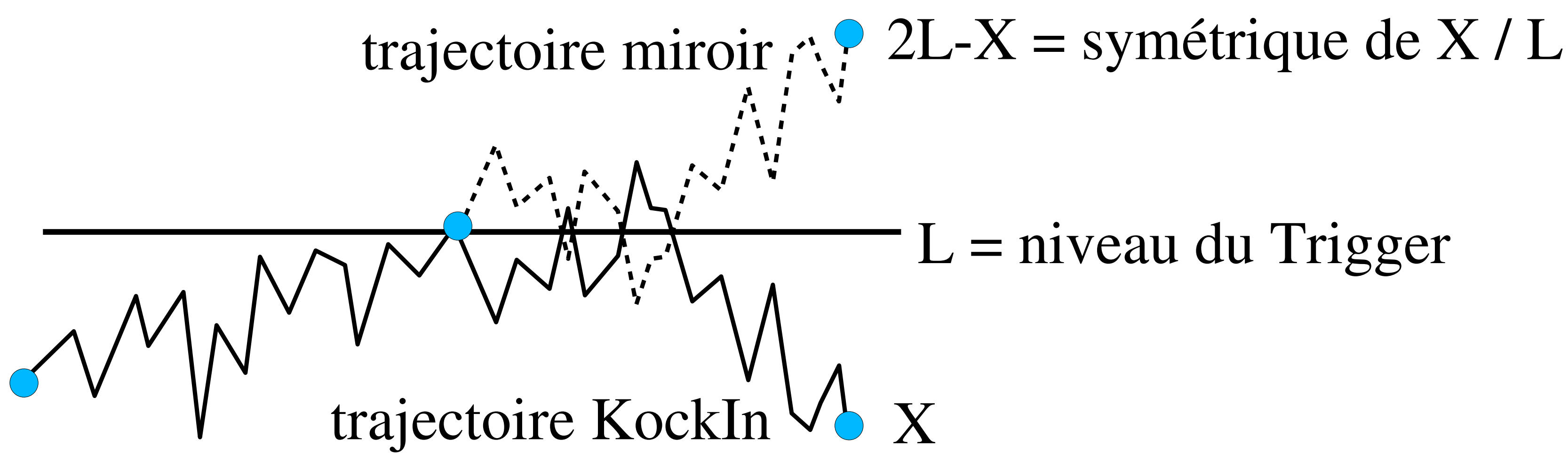
Graph 3D Option Call Up&In



SUNGARD

Relation Entre Limites KO / KI / Std

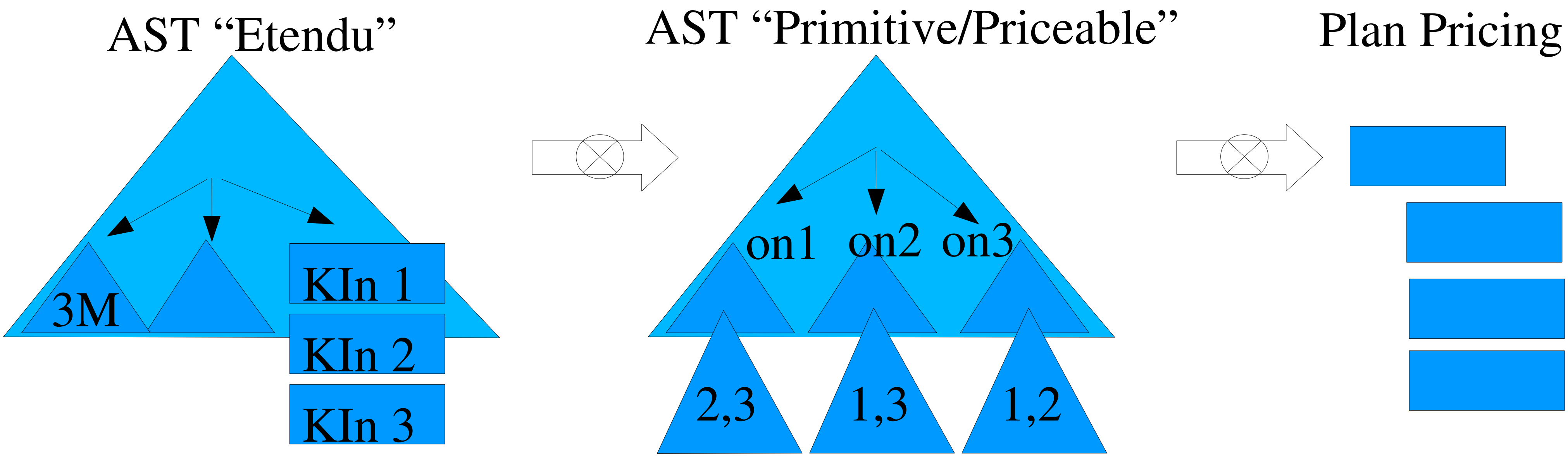
- Retour sur probabilités disjointes:
  - P(X=x) = P(X=x | event) + P(X=x | !event)
- Applications:
  - Option Simple = Opt KnockOut + Opt KnockIn
- Lemme du miroir :
  - Si de plus, la diffusion est “symétrique”
  - P(x | Knock) = P(2L - x)



SUNGARD

Options à Limites Multiples

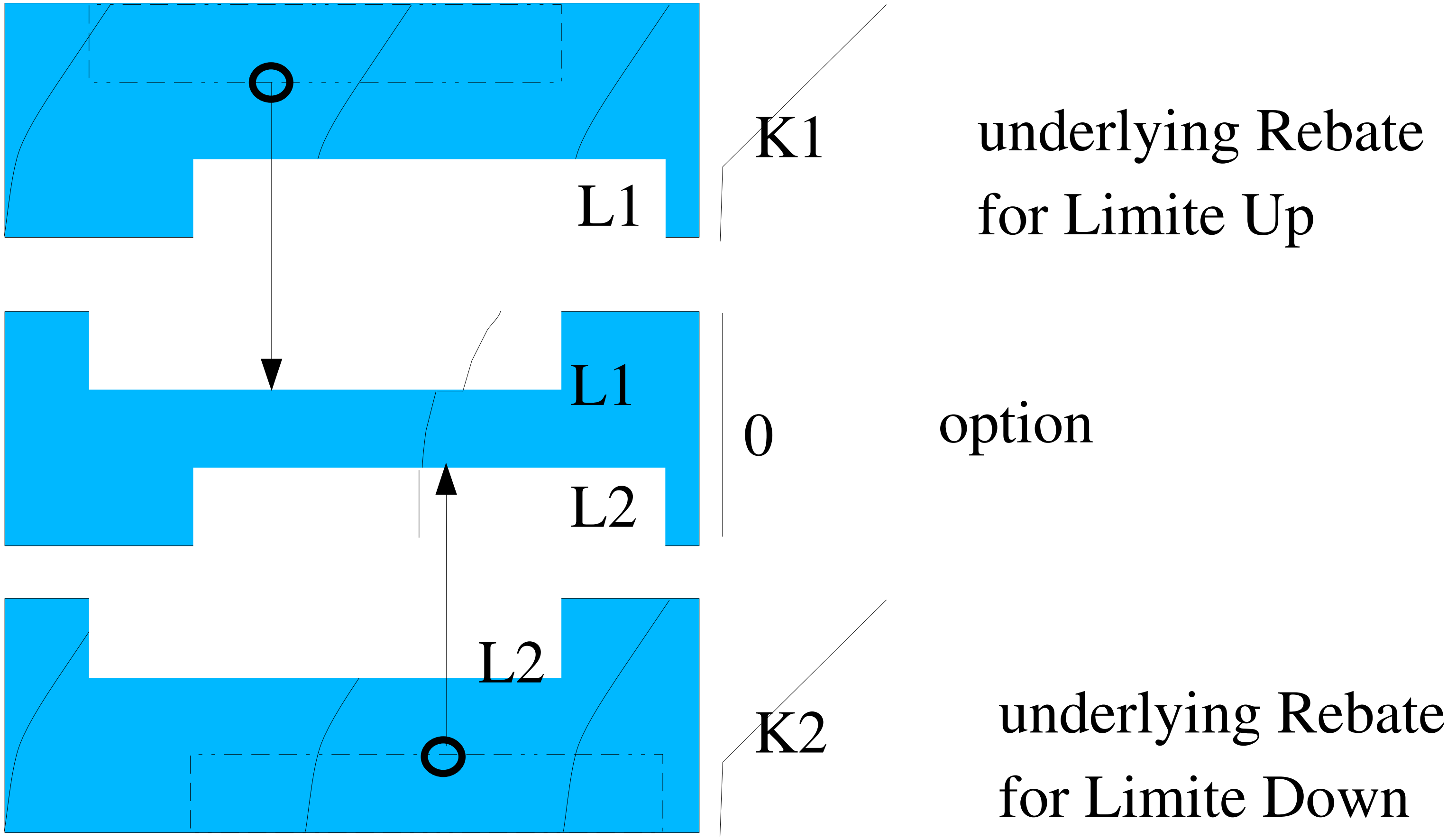
- "KnockIn" et "KnockOut" (éventuellement partiels)
  - sont des "macro helper" pour décrire les produits
  - doivent être transformés en Conditions Limites de type Dirichlet pour l'EDP



SUNGARD

Options à Double Limites

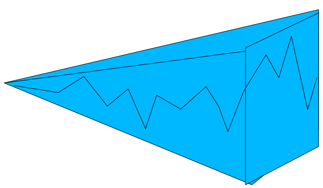
- Exemple: Call Up&In K1, Down&In K2



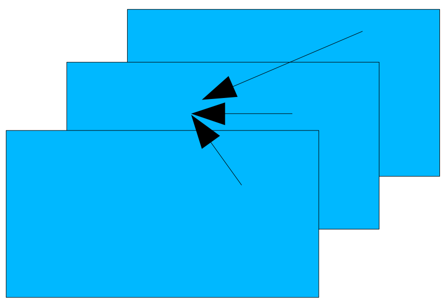
SUNGARD

Généralisation : Option à Evénements

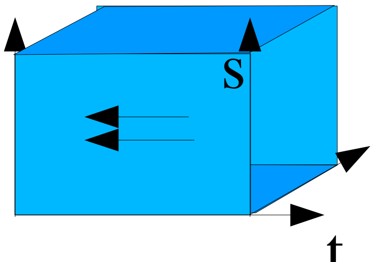
- Options Américaines et Options à Limites sont généralizables :
  - = “Options à Evénements”, “Option avec Transformations” ....
- L'instrument à des variables d'états internes:
  - Path Dependant !!!!



  - Discrets : $Z_0(t), Z_1(t) \ldots Z_N(t)$



  - Continus : Z(t,X)



Conclusion Partie 2

- L'algorithme de Pricing reflète la structure du produit = son comportement
- Il y a quelques briques de base de comportements, combinables
- MAIS une infinité de combinaisons exotiques
- Restriction
  - Intelligibilité pour client acheteur
  - Temps de calcul
  - Implémentation (multi-browniens...)
  - Précision numérique des analyses de risques

SUNGARD

Suite Présentation

Présentation 3) Modélisation Objet du Pricing

- Plan d'execution de Pricing, API Slices, UML

Présentation 4) Modélisation Objet des Instruments

- Expression, AST, Pattern Visitor, Langage de Description

Questions?

Questions ?

arnaud.nauwynck@gmail.com