



SUNGARD CADEXTAN

L'informatique qui
réinvente la
finance

Arnaud Nauwynck

Modélisation Objet de Librairie de Pricing

Partie 1 : Mathématique
Modèles de Diffusion, Equation de Pricing

Plan Général

- Partie 1 : Mathématique
 - ...
- Partie 2 : Algorithmique Numériques
 - Méthode des différences finies
 - décomposition de pricing exotiques, démo
- Partie 3: Informatique
 - Modélisation Orientée-Objet du pricing
- Partie 4: Informatique
 - Modélisation Orientée-Objet des Instruments

Plan

- Définitions des concepts financiers
- Modèles Discrets
 - Modèle
 - Pricing
- Interprétations Financière / Graphique
 - Notions de Delta, Volatilité, Couverture
- Modèles Continus
 - Modèle
 - Pricing

Introduction Valorisation

- Pricer = valoriser un actif = calculer un prix
- Un actif peut être coté sur le marché =>
 - quotation Bid / Ask + frais
 - real time (Reuter...)
 - fixing (Cloture de Marché, Mensuel, etc.)
- Plusieurs prix, un par market-maker
- Une seule valorisation pour “nous” dans un contexte donné
- Notion d'arbitrage / vrai prix? le marché a raison ...

Introduction Valorization(2)

Valo = PricingFunction (

- Instrument,
 - ModèleFinancier,
 - MarketData,
 - ValuationDate,
 - Configuration / Preferences
-)

Définition des Instruments

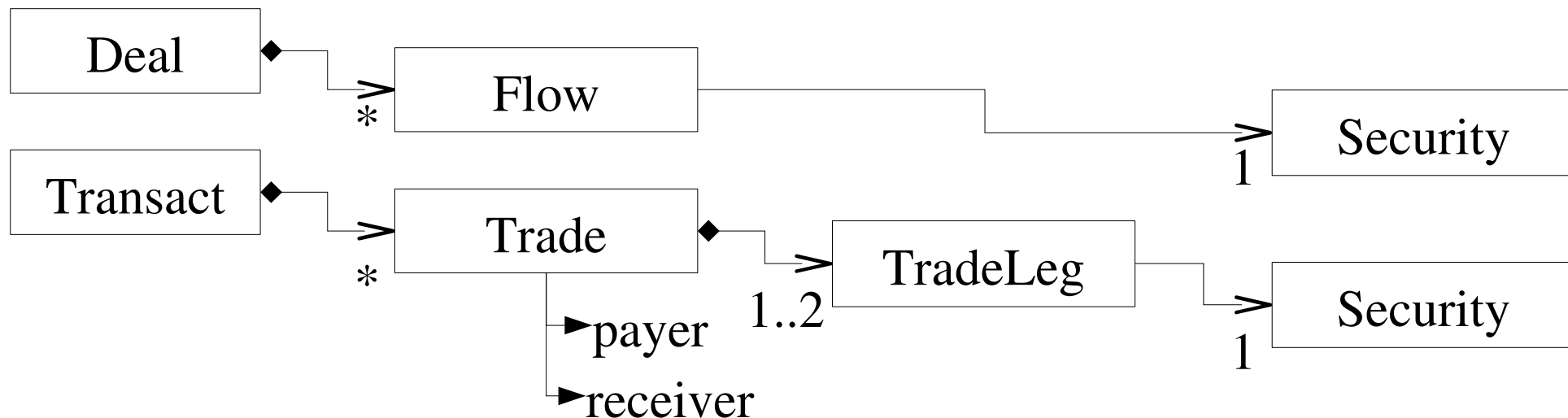
- Synonymes = Security / Instrument / Actif / Valeur / PriceableObject / FluxExchangeable...
- Les flux futurs échangés sont définis de façon juridique (non ambigu) dans un contrat
 - OTC / Warrants / convention de marchés ...
- Transposable facilement en fonction mathématique à posteriori

Définition des Instruments

- Composantes d'un instrument:
 - Flux fixés d'avance
 - Flux variables
 - Événements de mutations
- Types d'événements aléatoires futurs:
 - Fixing (événement de type discret, européen)
 - Trigger (événement de type continu, américain)
- Critère d'activation:
 - Par nous, forcé, par la contrepartie

Instruments versus Transactions

- Très grandes similarités entre tous les systèmes de booking
- quelques différences : versionning / auditing des evenements + ordre/execution/workflow
- Exemples : Infinity, Summit, Calypso...



Exemple Transaction+Instrument

➤ buy swap

➤ trade1 = swap

➤ payer = you ; receiver = me

➤ trade1-leg1 = Floating leg

➤ security = sum floating cash flow on fixing+2

➤ trade1-leg2 = Fixed leg

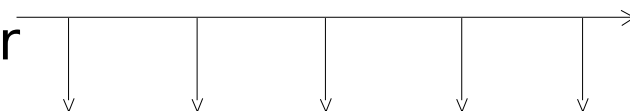
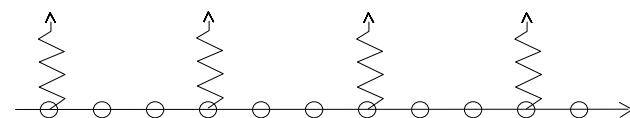
➤ security = sum cash flow on calendar

➤ trade 2 = premium / soult

➤ payer = me ; receiver = you

➤ trade2 – leg1 = payment leg

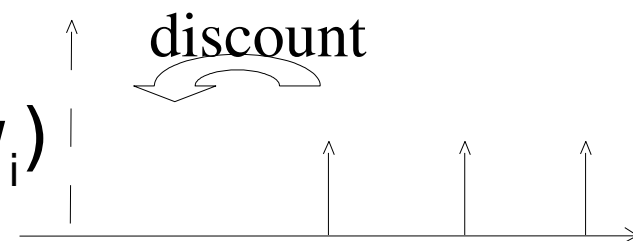
➤ security = Cash Flow at J+2



Valo = Espérance Cash Flows

➤ Flux certains:

$$\text{Valo} = \sum_i (\text{discount}_i \cdot \text{cashFlow}_i)$$



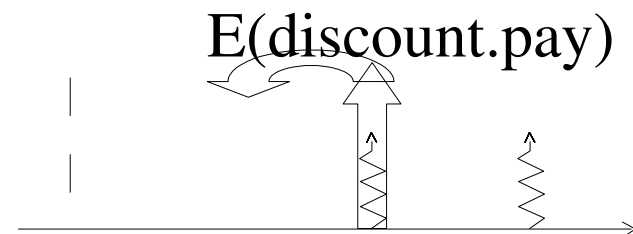
➤ Flux Incertains

$$\text{Valo} = \text{Espérance}_{\text{event}} \left(\sum_i (\text{discount}_i \cdot \text{pay}_i(\text{event})) \right)$$

$$= \sum_e \sum_i (\text{discount}_i \cdot \text{pay}_i(e) \cdot \text{proba}(e))$$

$$= \text{Intégrale}_s (\text{discount} \cdot \text{payoff}(S) \cdot d(S)) \text{ si Européenne}$$

➤ Il faut disposer des probabilités



Définition des Modèles Financiers

- **Modèle de Taux**
 - Actualisation des flux futurs seulement
 - Les flux passés sont déjà pris en compte dans la trésorerie au jour le jour
- **Modèles Probabilistes**
 - Discrets : Arbre binomial / trinomial
 - exemple: arbres/modèle de Cox-Ross-Rubinstein
 - Continus : Modèles Stochastiques, Browniens
 - exemple : modèle de Black-Scholes

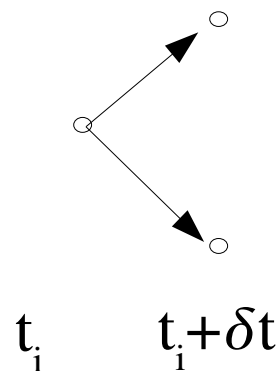
Plan

- Définitions des Concepts Financiers
- Modèles Discrets
 - Modèle de Diffusion : Modèle probabiliste de sauts
 - Pricing Forward / Backward (Arbre de Cox)
- Interprétation Financière / Graphique
- Modèles Continus

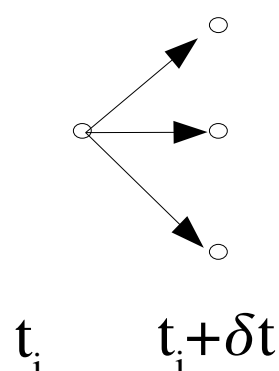
Modèle Probabiliste Discret

➤ exemple : arbre de Cox

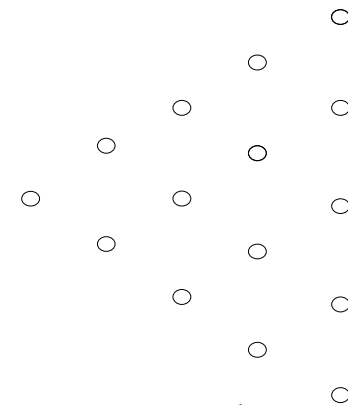
- $s(t) \Rightarrow s(t+\delta t)$
 - $s.(1+e)$ avec proba = P
 - $s.(1-e)$ avec proba = $1-P$



maille binomiale



maille trinomiale



arbre complet

(mailles Recombinantes!!)

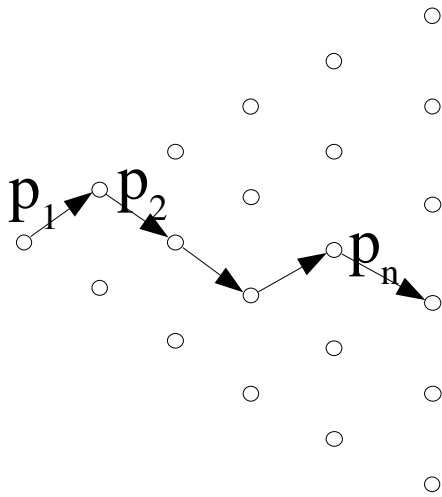
maillage = $N \times (N-1) / 2$ mailles

$t = t_0, t_1 \dots t_N$

Méthode Forward Discrète

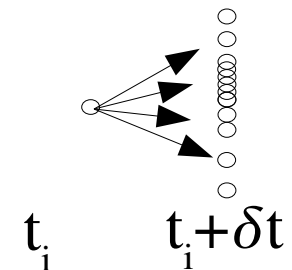
- Si Les probabilités p_i sont indépendantes 2 à 2 (modèles stochastiques)

$$\Rightarrow \text{Proba}(\text{trajectoire}) = p_1 p_2 \dots p_N$$

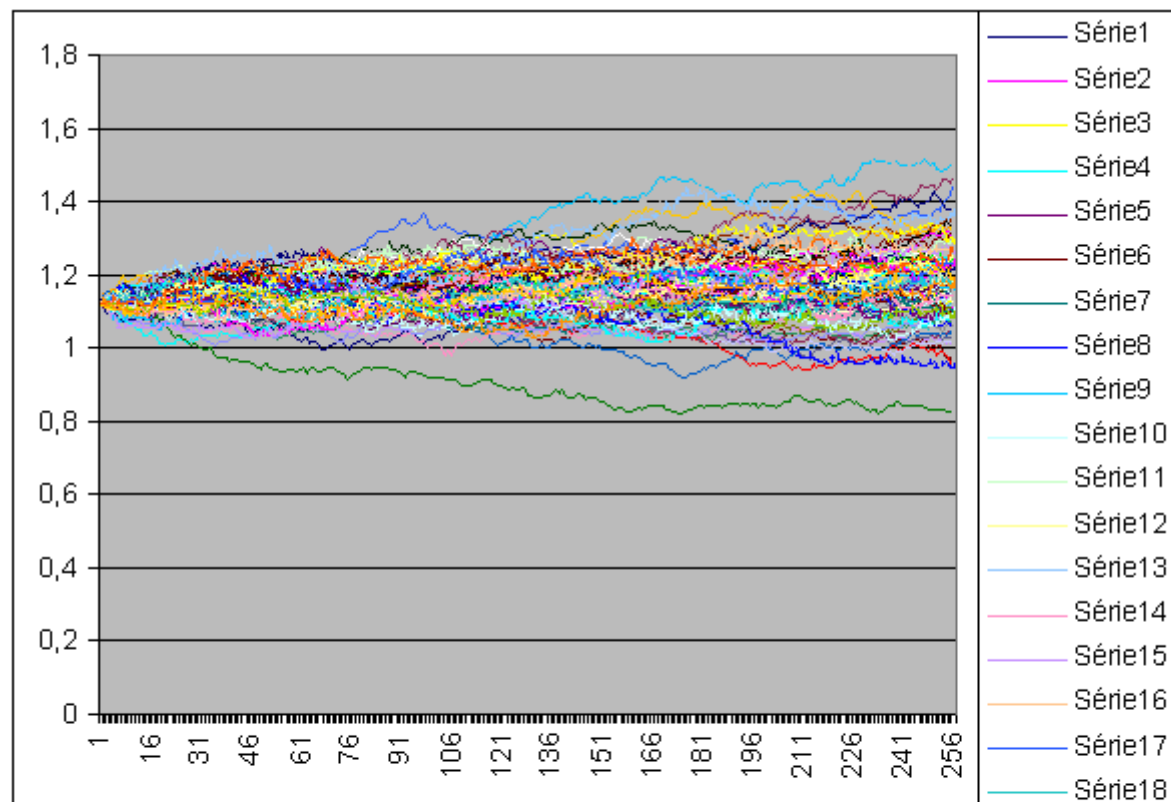


- Méthode de “type Monté-Carlo” :
 $\text{Valo} = E (\text{Payoff}(\text{traj.}) * \text{Proba}(\text{traj.}))$
 $= \text{Sum}_{i2..iN} (\text{Payoff}(\text{traj.}) * p_{i1} p_{i2} \dots p_{iN})$

- Remarque: la méthode de Monté-Carlo NE nécessite PAS d'arbre recombinant



Méthode Monté-Carlo



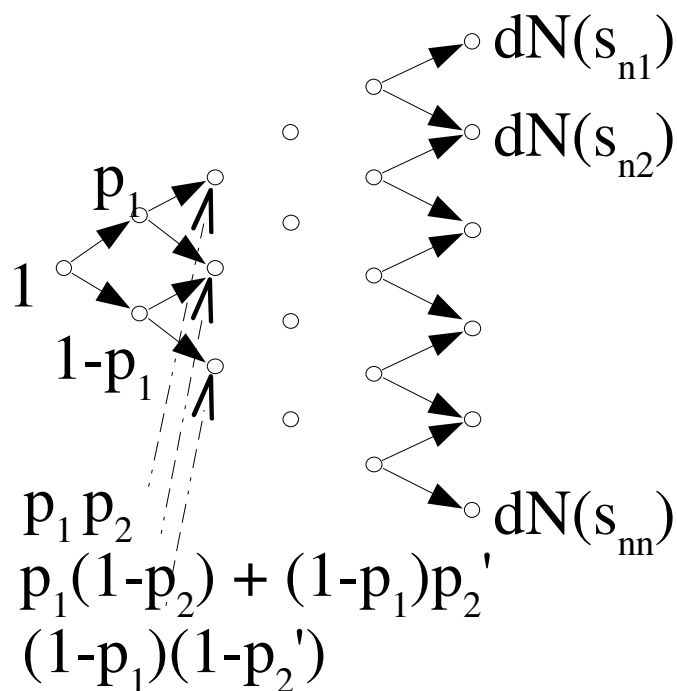
Méthode de Monté-Carlo

- Avantages:
 - Algorithme très simple
 - Pricing de produits path-dépendant
- Inconvénients:
 - Convergence lente, en $1/\sqrt{N}$
 - imparfait/biaisé : générateur pseudo aléatoires
 - Le Pricing est non répétitif, aléatoire !
 - Discontinuité, Trigger / peu de trajectoires => imprécis
 - Option américaine => estimation du prix d'exercice le long de toute une trajectoire !! => pricing récursif !

Méthode de Monté-Carlo (2)

- Techniques d'améliorations:
 - Réduction de variance, ...
 - Greeks et Analyse de Risques
 - différence entre 2 prix => convergence encore plus faible!
 - Calcul de Maliavin => ... complexe ...
 - Parallélisation des calculs (Grid Computing)
- En Résumé :
 - Bien quand on ne peut pas faire autrement
 - preuve de la séparation instrument/modèles/pricing

Méthode Forward Discrète



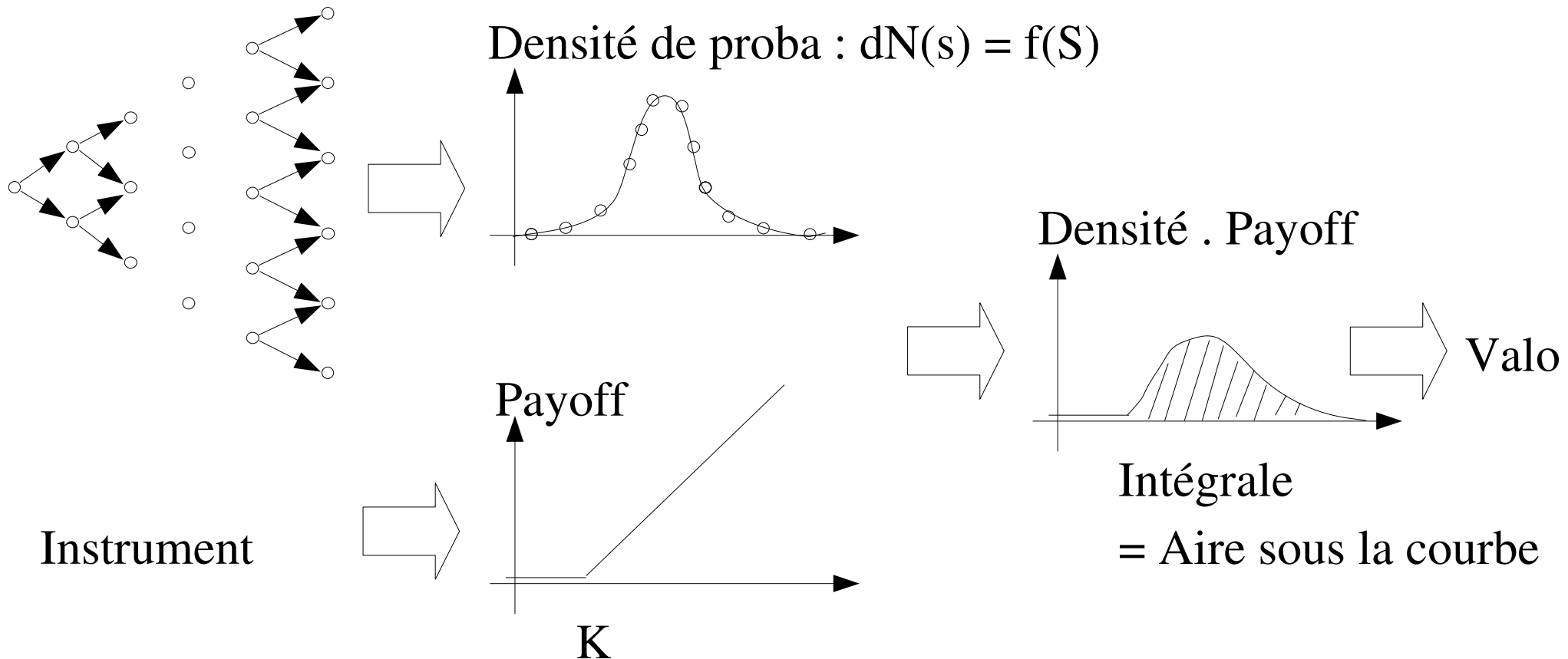
- Densité de probabilité =
 $dN(X) = \text{Proba}(S(T)=X)$
 $= \text{Sum Proba}(\text{trajectoire})$
 $\text{trajectoire} \setminus S(T)=X$

- Coupe à i fixé = $S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{ii} =$
 Vecteur d'états

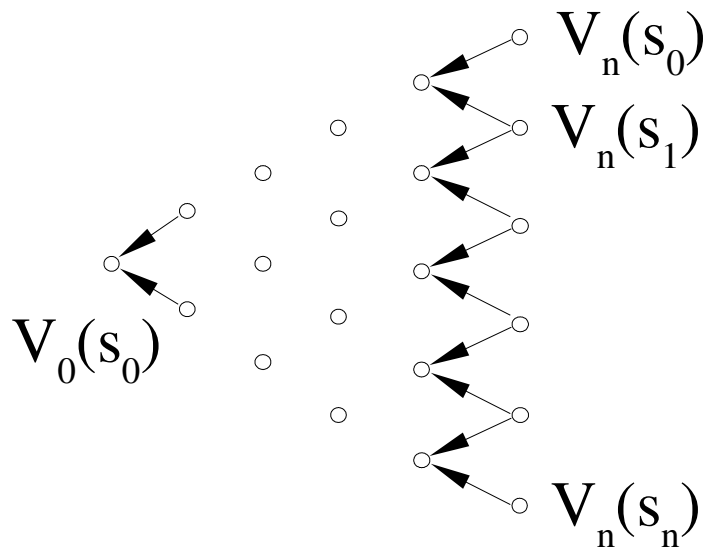
- dN calculables de proche en proche

Pricing par Densité de Probabilités

- $\text{Valo} = \text{Esperance (Sum (discount . Payoff))}$
 $= \text{Sum (Payoff}(S_i) * dN(S_{ni}))$



Méthode Backward Discrete



- Initialization à l'échéance = Valeur intrinsèque

$$V_n(x) = V_{\text{Intrinsèque}}(x)$$

- $V_i(x) = E(\text{Valo à } t=i \mid S_i=x)$

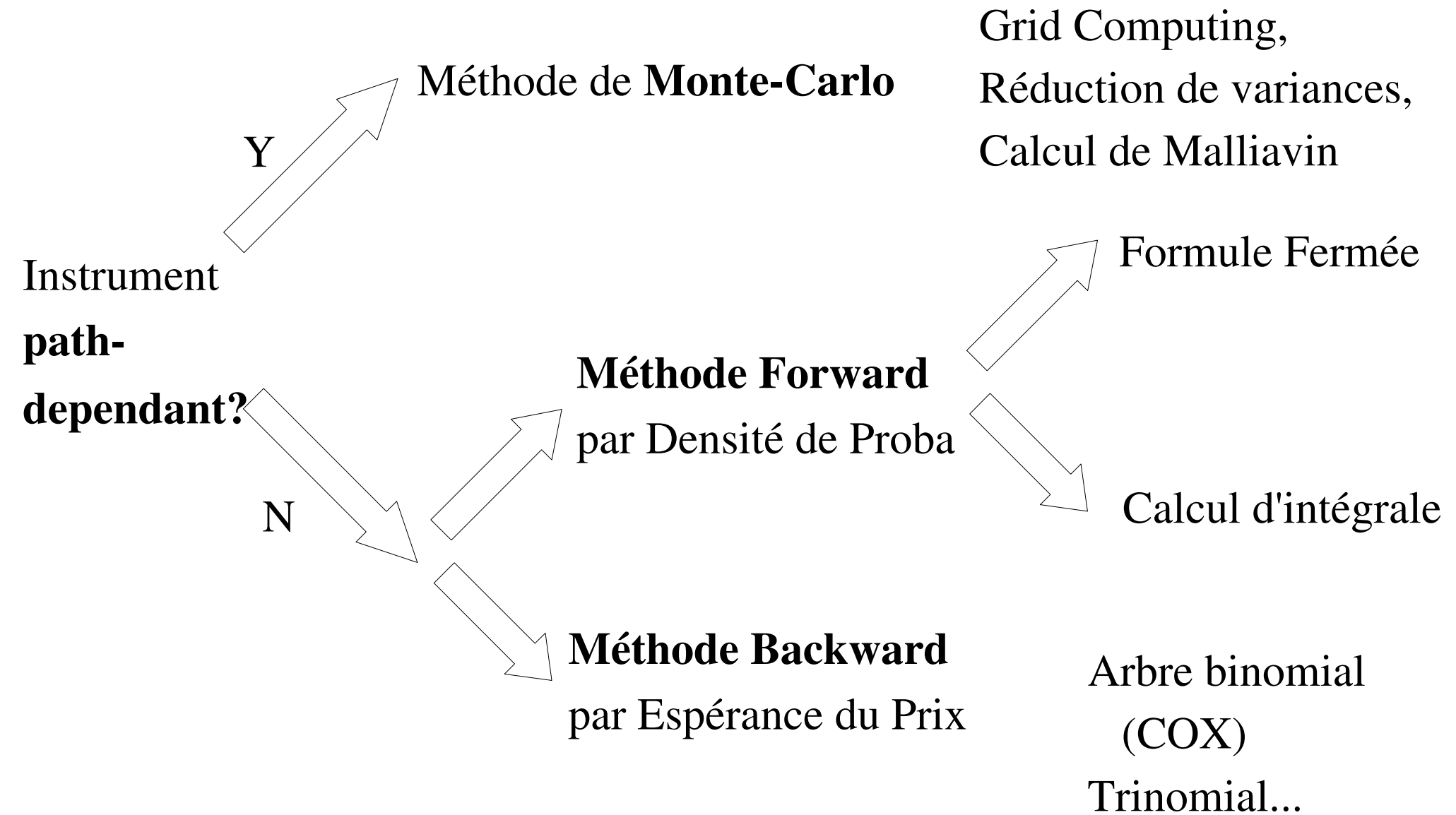
...

- $V_i(x) = p_i V_{i+1}(x) + (1-p_i) V_{i+1}(x+1)$

...

- $V_0(s_0) = \text{Valo du produit}$

Résumé : Méthodes Discrètes



Plan

- Définitions des concepts financiers
- Modèles Discrets
- Interprétation Financière / Graphique
 - Cas d'une Option Call, Graph de Pnl
 - Définition de la Volatilité, Couverture
- Modèles Continus

Exemple : Option Call

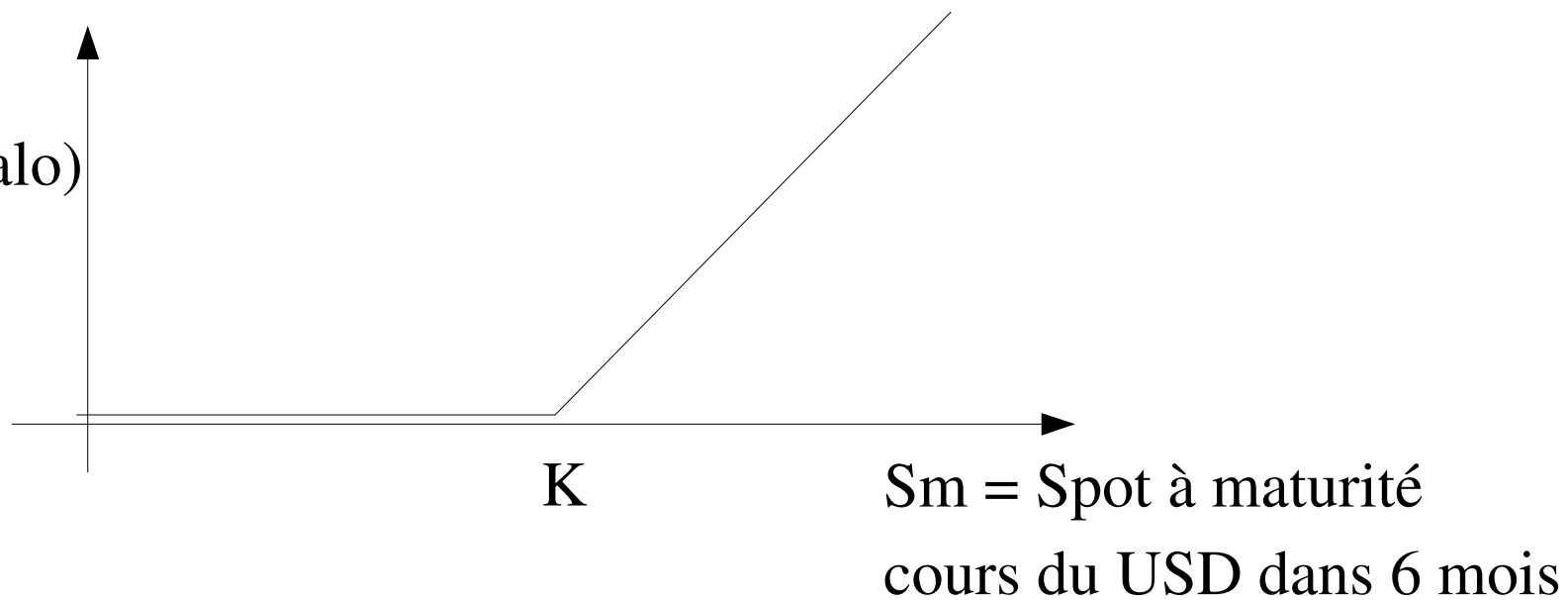
- Call = Droit d'acheter un sous-jacent à un prix fixé d'avance
- Exemple :
 - Call EUR/USD, expiry=6 Mois, $K=1.2$, 1M\$
- Payoff = $\text{Max}(0, S-K) = |S-K|^+$

Pnl

= Profit & Loss

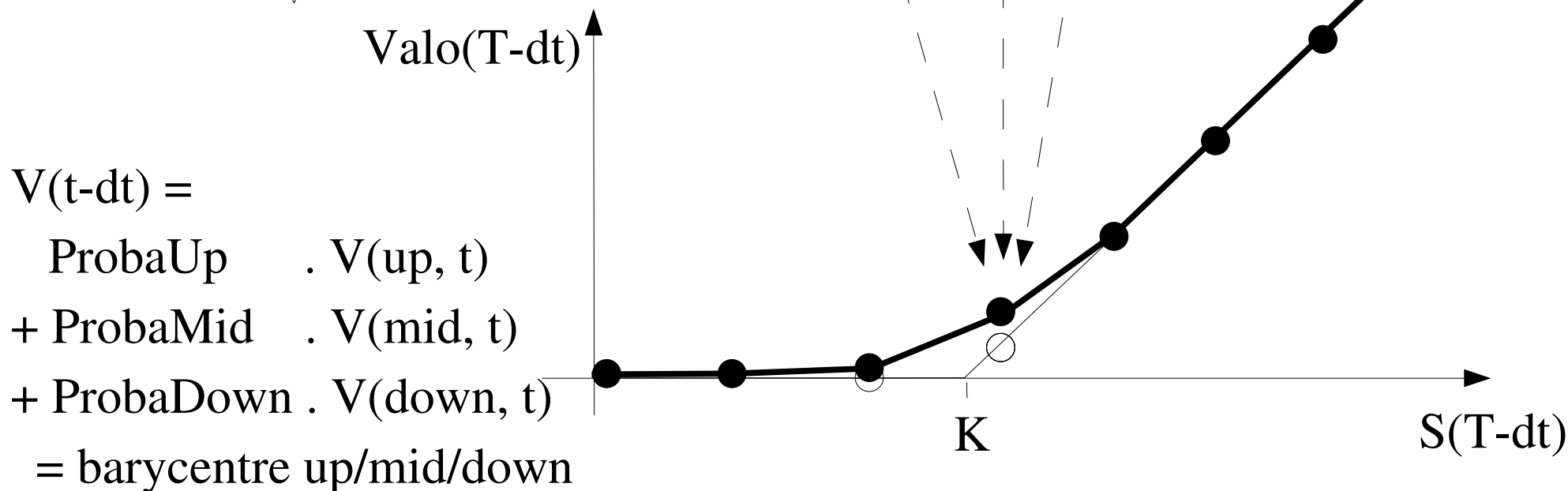
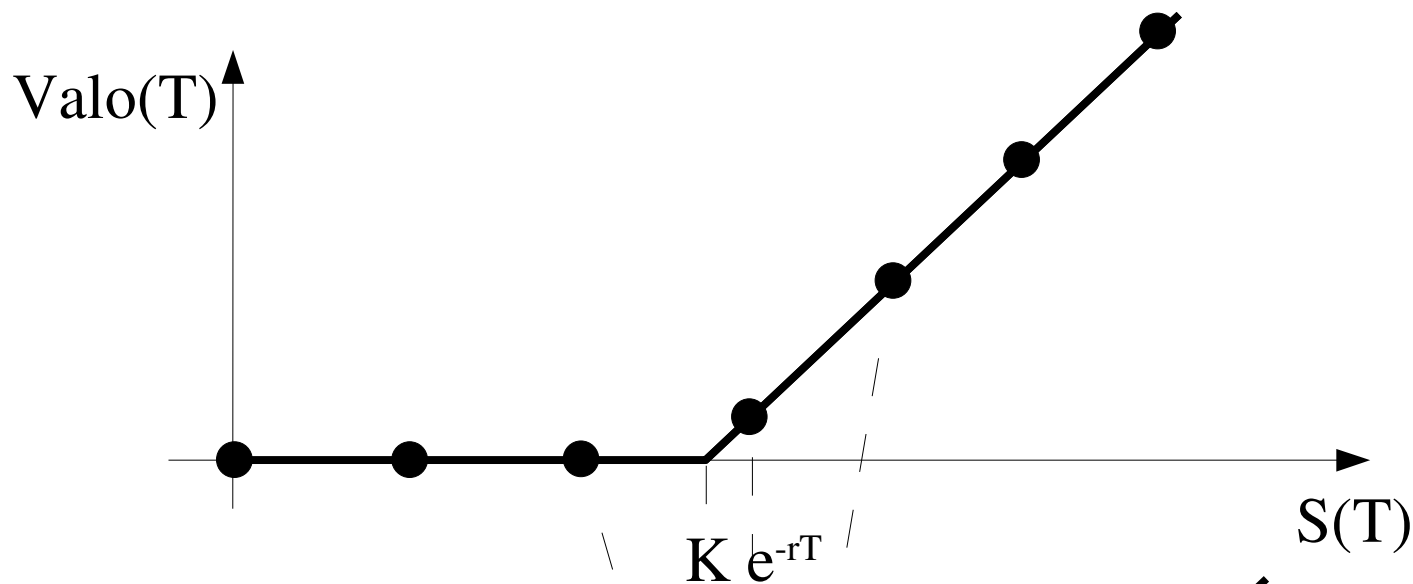
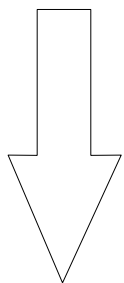
(en devise de valo)

= en EUR



Pricing Backward : 1 Pas de diffusion

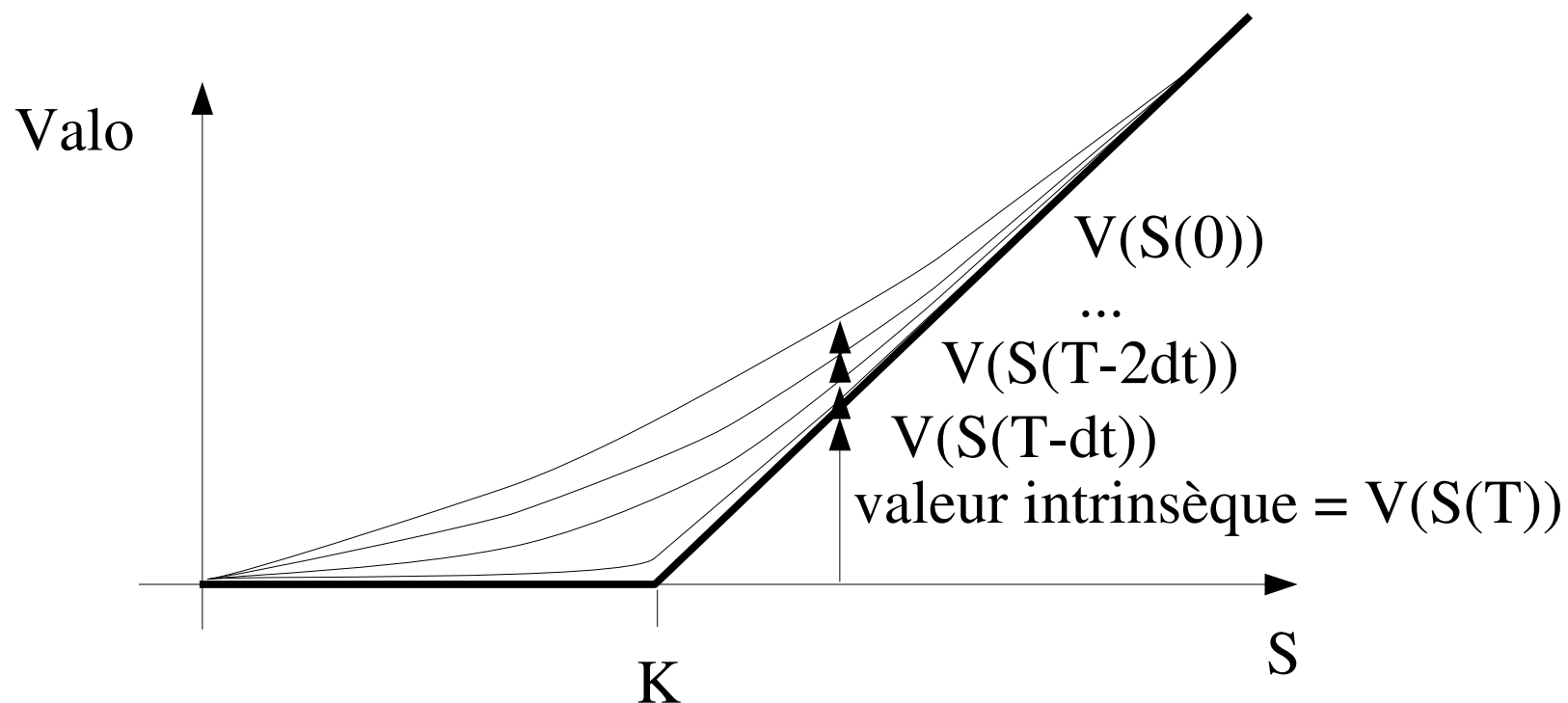
Backward
Step: $1dt$
 $T \rightarrow T-dt$



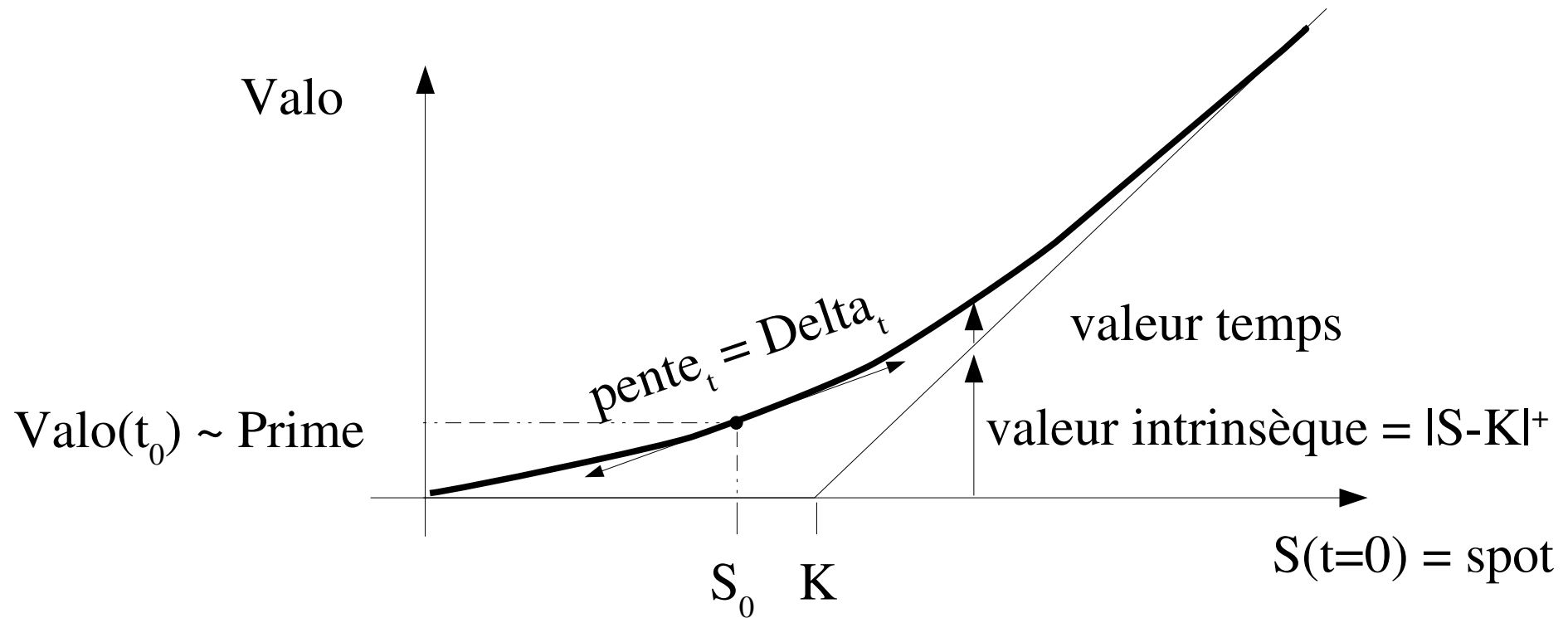
$$\begin{aligned}
 V(t-dt) = & \\
 & \text{ProbaUp} \cdot V(\text{up}, t) \\
 & + \text{ProbaMid} \cdot V(\text{mid}, t) \\
 & + \text{ProbaDown} \cdot V(\text{down}, t) \\
 = & \text{barycentre up/mid/down}
 \end{aligned}$$

Pricing Backward

- Courbes successives = diffusion pas-à-pas
- Valeur Intrinsèque / Valeur Temps



Résultat: Graph = Valo / S

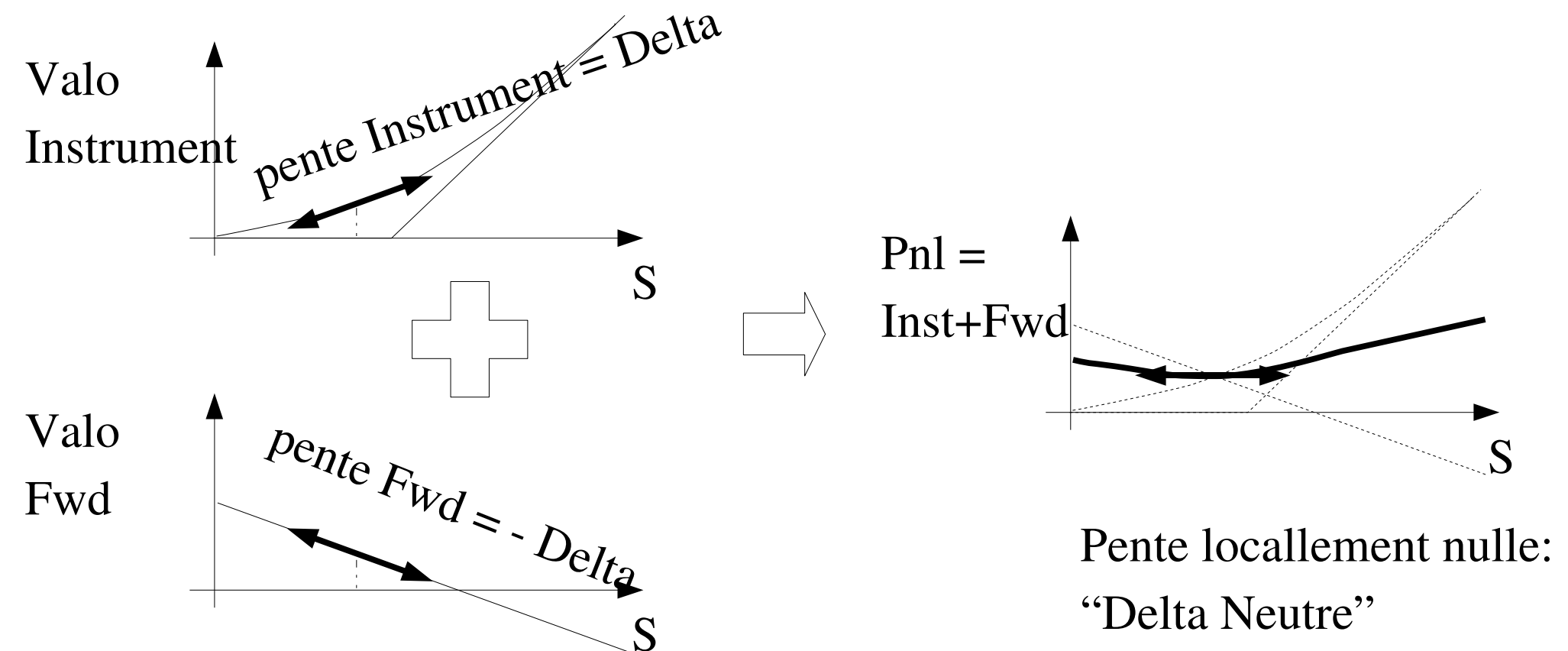


Couverture en Delta

- Exemple : position en EUR/USD ~Call 100M
 - Delta = 30M EUR par unité de Spot
 - A chaque seconde, le spot bouge de +/- 1 tick ($=10^{-4}$)
 - => La position varie de +/- 30 000 EUR
 - => le Pnl est connu à 60 000 EUR près
- => INACCEPTABLE en fin de journée !
- Les Traders ont pour obligation de se couvrir en "Delta", c-a-d Delta=0

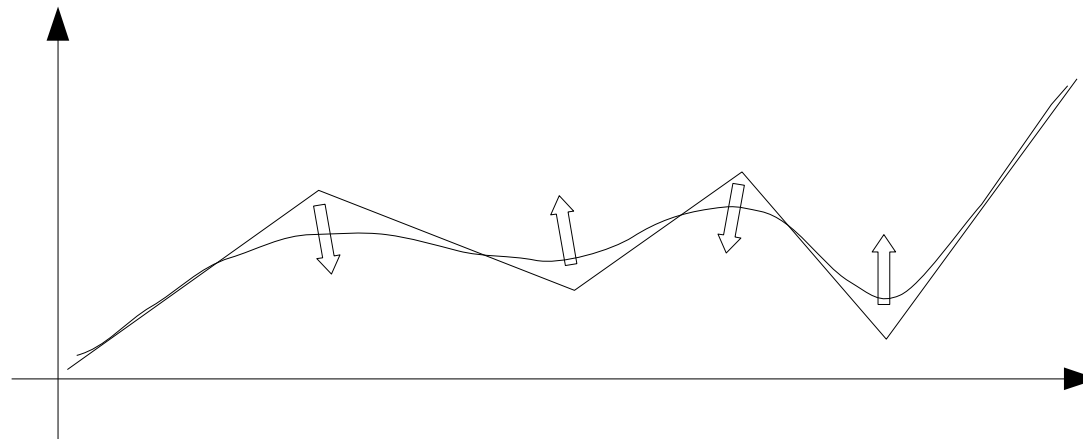
Pente et Couverture en Delta

- au 1^{er} ordre, $\text{Valo} = \text{Valo}_0 + \text{Delta} * dS + O(dS)$
- couverture en Delta : achat d'un spot/forward/swap opposé pour éliminer le terme risqué "Delta * dS"

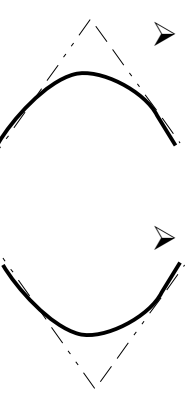


Point de Vue Trader

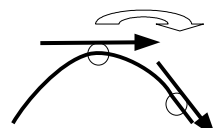
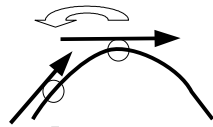
- Pour un trader, les pentes aux limites du produit ne comptent “pas”...
- Les ruptures de pentes “comptent”
- Discontinuité de Payoff
 - => Source de Diffusion / Convexité
 - => Source de valeur temps



Convexité, point de vue Trader

- La convexité de la courbe est exprimée par la dérivée seconde : d^2V/dS^2
 - Définition des Greeks :
 - Gamma = d^2V/dS^2
 - Theta = dV/dt
 - Une position convexe est dite “Gamma+”, par opposition à “Gamma-”
- 
- Gamma- correspond à une vente d'option (short vol)
 - Gamma+ correspond à un achat d'option (long vol)

Position Gamma- pour le Trader

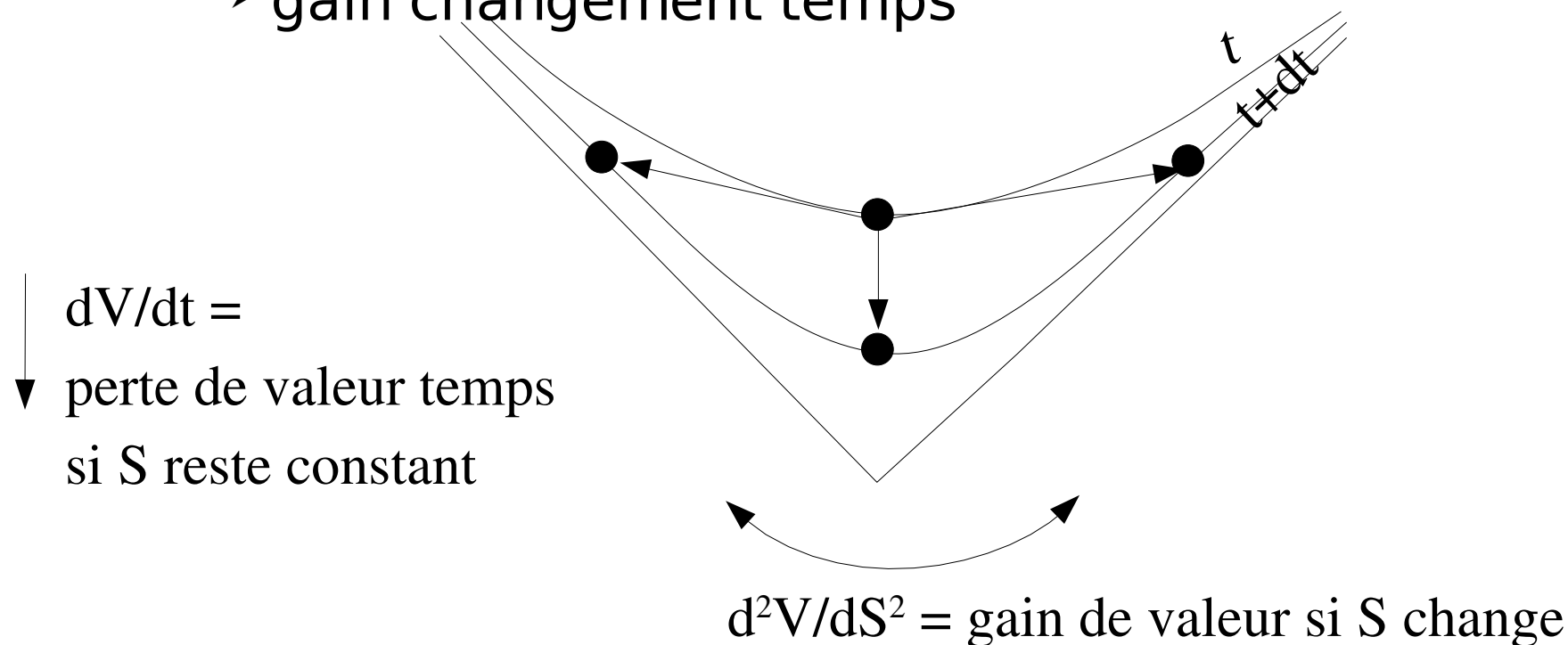
- Position Gamma- :
 - Si Spot++ => $\Delta--$
=> il faut racheter du spot pour couvrir le nouveau $\Delta < 0$
=> **on rachete au prix fort** 
 - Si Spot-- => $\Delta++$
=> il faut revendre du spot pour couvrir le nouveau $\Delta > 0$
=> **on revend au prix faible** 
- A chaque aller-retour, on perd de l'argent...
en plus des coûts de transactions ...
- MAIS si le Spot reste inchangé (temps++),
on gagne la valeur temps
(on encaisse la prime)

Prix d'une Option / Prix de la Couverture

- Coûts de gestion du portefeuille de couverture
= Prix moyen des allers-retours, stratégie $\Delta=0$
= Prix théorique du Call
- Définitions : Martingale, Portefeuille simulant le Call...
- La Prime (prix) d'une Option est égale au prix de sa couverture
- Adopter une stratégie de couverture d'une Option, c'est “synthétiser” l'option que l'on a vendu
- On parle donc de produits “Dérivés” car ils sont dérivés/synthétisés à partir du marché primaire

Convexité et Volatilité

- Volatilité =
 - fréquence/force moyenne des sauts de Spot
 - liée au prix des Options
 - Point d'équilibre entre (ratio Gamma/Theta)
 - coût changement spot
 - gain changement temps



Effet Levier : Point de Vue Spéculateur

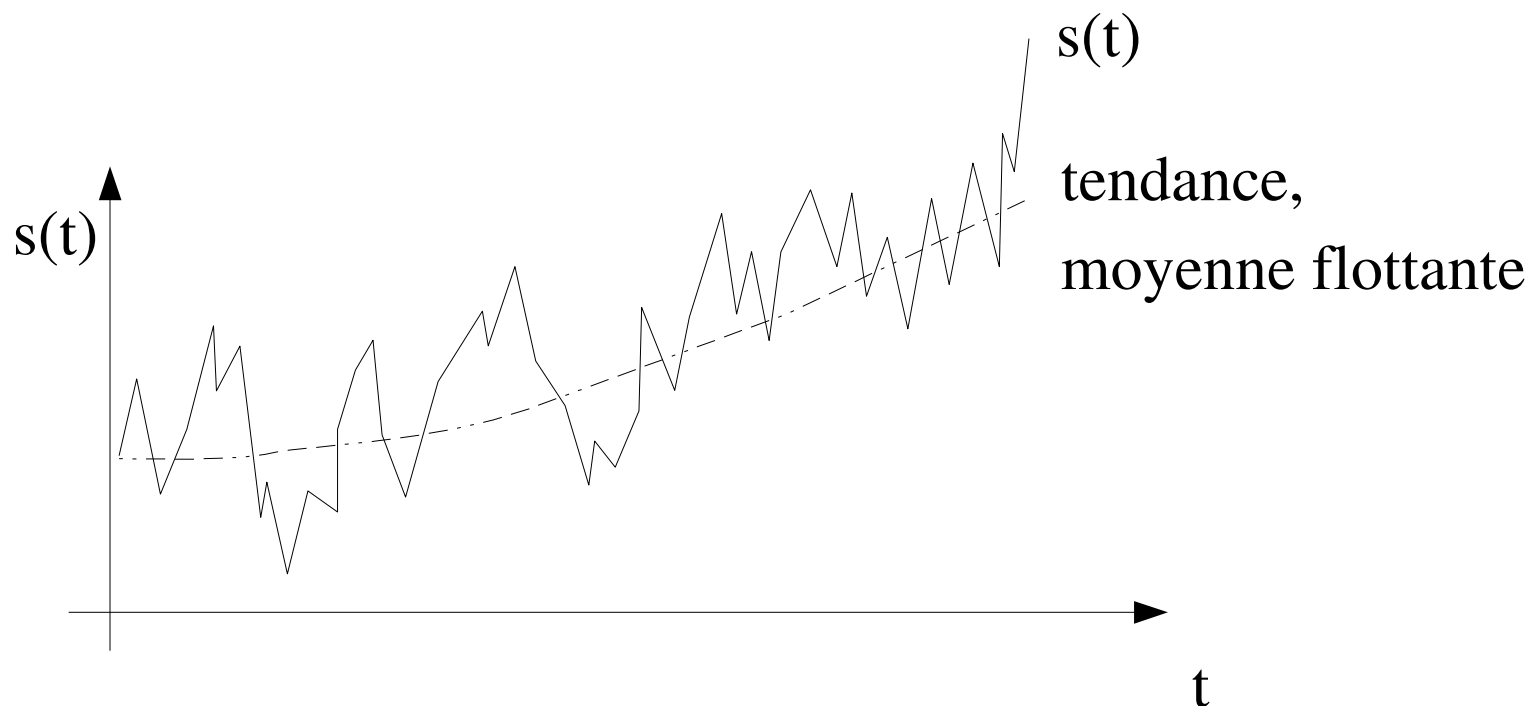
- Exemple : investissement de 1000 EUR dans une Option (Call E/U, 6M, $K=1.0$)..
 - Premium = 5%
 - $\Rightarrow$ correspond à un Montant = 20K USD
 - $\Delta=50\%$
 - $\Rightarrow$ on est sensible comme si on avait acheter 10K USD
 - Pour 1K EUR investi, on est sensible de 10K USD
- Effet Levier = Gearing = Δ/P

Plan

- Définitions des concepts financiers
- Modèles Discrets
- Interprétation Financière / Graphique
- Modèles Continus
 - Diffusion Forward : Browniens
 - Pricing Backward : Calcul de Ito, EDP

Modèles Probabilistes Continus

- Quotations observées sur le marché
 - fonctions fractales
= fonctions continues, mais jamais dérivables
 - mouvements “Browniens”

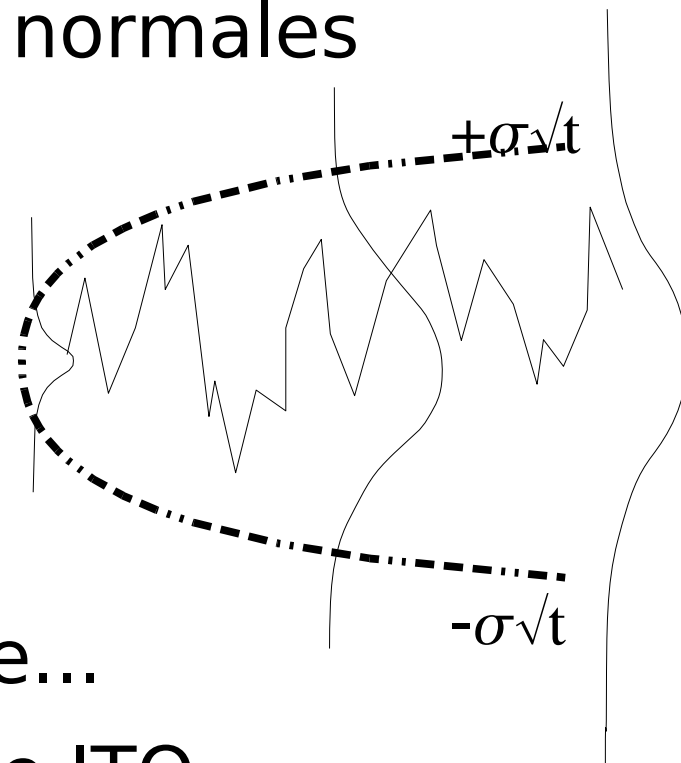


Brownien = Bruit Blanc, d'Intégrale Définie

- $s(t) = f(t) + w(t)$
 - $f(t)$ = partie “déterministe” : prévision forward...
 - $w(t)$ = processus “aléatoire”
= bruit blanc
~ suit une loi normale : $N(m, \sigma_t)$
- Problèmes théoriques:
 - $w(t)$ n'est pas dérivable
 - Mais on veut des intégrales sur $\int dw$ et $\int dw^2$
 - En moyenne, W est centré en 0 : $E(\int dw) = 0$
 - Le prix de la couverture en Δ est lié à “ $\int dw^2$ ”

Définition des Browniens

- $W(t)$ un brownien
 - processus stochastique, issu de 0
 - Les accroissements sont des lois normales de dispersion $\sigma\sqrt{t}$
 - $W(t_2) - W(t_1) = \text{loi } \mathcal{N}(0, \sigma\sqrt{t_2 - t_1})$
 - $\sigma = \text{volatilité du brownien}$
- Calculs
 - non intégrable au sens classique...
 - intégrale stochastique / calcul de ITO



Modèle de Black-Scholes

- Le modèle le plus classique est le modèle de “Black & Scholes”

$$dS_t/S_t = u dt + \sigma dW_t$$

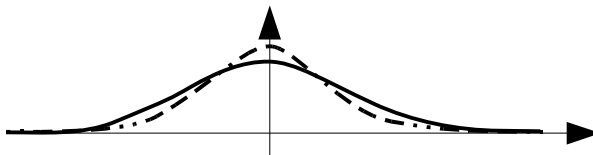
- $u \cdot dt$ correspond à la partie forward:
 - Si $\sigma=0$, on obtient $S_{(t)} = S_0 e^{ut}$
- σdW_t correspond à la partie stochastique
 - intuitivement: à chaque pas de temps δt , δS “subit un saut aléatoire” = $\sigma \cdot S \cdot \delta W$, avec $\delta W \sim N(0, \sigma \sqrt{\delta t})$

Pricing par Densité de Probabilités

- Rappel : $V = E(\text{payoff}(S(T), T)) = \int \text{payoff}(S) \cdot \varphi(S) dS$
- En continue, la densité est définie par:
 - $\varphi(x)$ = densité de probabilité à l'échéance
 - $E(x < S(T) < x+dx) = \varphi(x) dx$
- Formule donnant $\varphi(x)$ depuis $dS/S = \dots dW$
 - Cas générale: équation Forward de Kolmogorov (calcul de Ito)
 - Discrétisation $dt = \delta t \dots$ simulation de $\varphi(x)$ par Monte-Carlo
 - Cas de Black-Scholes... formule explicite $S(t, W_t)$

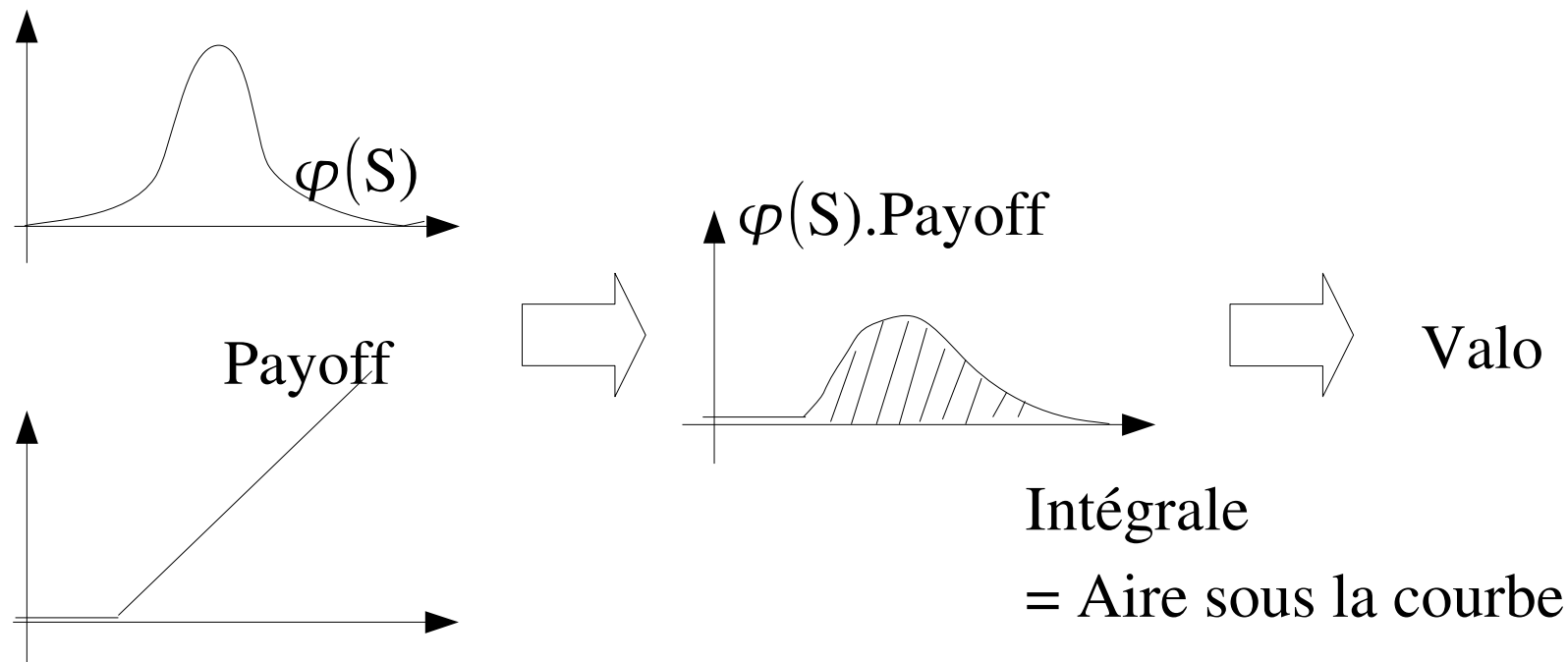
Densité de proba Black-Scholes

- $dS_t/S_t = u dt + \sigma dW_t$
- changement de variable : $Y = \ln S$
 - $\Rightarrow dY_t = (u - \sigma^2/2) dt + \sigma dW_t$
 - $\Rightarrow Y(T) - Y(0) = \int_0^T (u - \sigma^2/2) dt + \int_0^T \sigma dW_t$
- $S(t) = S(0) \exp((u - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$, avec $W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma\sqrt{t})$
- $\log(S)$ suit une loi gaussienne : **loi Log-Normal**
- en réalité, on observe sur le marché une loi un peu différente $\Rightarrow$ “smile” des options classiques...



- Condition de Dupiere: $\varphi(x) = d^2\text{Call}/dK^2$
- Calibration :
 - Call1, Call2, ...CallN $\Rightarrow$ calcul de $\varphi(x) \Rightarrow$ calcul de σ
- Remarque : non unicité du problème inverse !
 - 2 modèles différents $dS=f_1(dW_1)$ et $dS=f_2(dW_2)$ peuvent aboutir au même $\varphi(x)$,
 - $\Rightarrow$ donc aux même prix des classiques !!!!
 - $\Rightarrow$ mais pas au même prix des exotiques !!!!

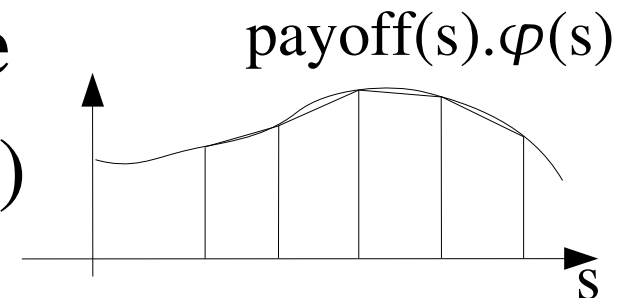
Intégrale : Formule Fermée /Numérique



➤ Si “ $\text{payoff}(S) \cdot \varphi(S)$ ” admet une primitive

➤ $\Rightarrow$ “formule fermée” (produits de 1^{ère} génération)

➤ Sinon $\Rightarrow$ calcul numérique d'intégrale
(méthode des trapèzes... 2^{ème} génération)



Pricing dans le modèle Black-Scholes

- Binaire : $\text{Payoff}(S) = 1_{S-K>0}$

$$\text{Bin}(s, t) = \int e^{-rT} 1_{S-K>0} \phi(s) ds = e^{-rT} \int 1_{S(x)-K>0} g(x) dx$$

avec $S(x) = S_0 e^{(u - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \sqrt{t}x}$ et $g(x) = \text{fonction de Gauss} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

Calculons x tel que $S(x) - K > 0$

$$S(x) > K \Leftrightarrow (u - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \sqrt{t}x > \log \frac{K}{S_0} \Leftrightarrow x > -d_1 \quad \text{avec} \quad d_1 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + (u - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma \sqrt{t}}$$

$$\text{Bin}(s, t) = e^{-rT} \int 1_{S(x)-K>0} g(x) dx = e^{-rT} \int_{-d_1}^{\infty} 1 g(x) dx = e^{-rT} N(d_1)$$

Pour les Calls, le calcul est similaire:

- $\text{Payoff} = \text{Max}(0, S-K) = |S-K|_+$
- $C(s, t) = s N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$

ANNEXE

Avantages/Inconvénients de Black-Scholes

➤ Avantages

- Modèle simple, calculable
- Formules fermées pour les options européennes simples (call, put, binaires...)
- Modèle homogène :
 - Transformation $S \rightarrow 1/S \implies$ même modèle
 - un Call EUR/USD est égal à un Put USD/EUR !

➤ Inconvénients

- Volatilité non constante
- Densité non log-normale (Smiles des classiques)
- Pas de formules pour les options exotiques

Autres Modèles Stochastiques

- Modèle mono-brownien
 - modèle de Dupire ... $\sigma_t = \sigma(t, s_t) = \sigma + a(s_t - s_0) + b(s_t - s_0)^2$
- Modèle multi-brownien
 - exemple modèle “vol stochastique” / SABR
$$d\sigma = v dt + \Sigma dW_2$$
- Modèle avec saut
 - $dS_t/S_t = u dt + \sigma dW_t + a dJ_t$, J processus de Poisson
- Pas de consensus du marché !!!
 - R&D très active, smile des exotiques
 - Pas de formules fermées ... nécessité d'EDP

Equation Différentielle de Pricing

- $V(t,S)$ = valo du portefeuille
- On cherche à calculer dV , pour obtenir l'équation différentielle de V
- Calcul de ITO

$$dV = ?$$

$$= rV dt$$

r = taux d'intérêt sans risque

(condition d'autofinancement
d'un portefeuille martingale)

$$= dV/dt \cdot dt + dV/ds \cdot ds + \dots /d^2S$$

Développement limité d'ordre 2 en dt, dS

**Calcul de dS^2 pour
le modèle de diffusion**

Substitution des terme $dW^2 \Rightarrow dt$

Equation Différentielle de Pricing

➤ Rappel Formule de Taylor-Lagrange:

$$➤ f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0).(x-x_0)^2 + o(2)$$

➤ sous forme différentielle, ordre 1

$$f(x_0+dx) = f(x_0) + f'(x_0) . dx$$

Calcul de ITO

➤ si X_t est un processus stochastique:

$$dX_t = a dt + b dW_t$$

=> il faut développer à l'ordre 2 pour obtenir les termes d'ordres 1 contenus dans dW^2 !!

Calcul de Ito

- En effet **$dW^2 = dt$** !!
- Si dW' n'est pas normé, $dW'^2 = \sigma^2 dt$

On note aussi (cf Multibrownien)

$$\langle dW_1, dW_2 \rangle$$

Formule de Ito:

- soit $X_t = a dt + \sigma dW_t$
- $f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0) a dt + \frac{1}{2} f''(x_0) \sigma^2 dt$

ANNEXE

EDP du modèle de Black-Scholes

- $V(s(t),t)$ la valo d'un actif ou portefeuille
- Appliquons la formule de Ito sur $V()$:

$$dV = dV/dS dS + dV/dt dt + \frac{1}{2} d^2V/dS^2 dS^2 + \dots dt dS + \dots dt^2$$

- calculons par ailleurs dS^2 :

- $dS = S (u dt + \sigma dW)$
- Appliquons la formule : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

EDP du modèle Black-Scholes (2)

➤ On obtient donc :

$$\begin{aligned} dS^2 &= S^2 (u dt + \sigma dW)^2 \\ &= S^2 ((u dt)^2 + 2 (u dt) (\sigma dW) + (\sigma dW)^2) \\ &= S^2 (... dt^2 + ... dt dW + \sigma^2 dW^2) \\ &= S^2 \sigma^2 dW^2 \quad \text{car ordre 1} \\ &= S^2 \sigma^2 dt \quad \text{car } dW^2 = dt \end{aligned}$$

EDP du modèle Black-Scholes (3)

- le portefeuille autofinancé est une martingale si

$$E(dV) = V \cdot r \cdot dt$$

r est le taux d'intérêt sans risque

- où

$$Vr dt = dV/dS (S u dt) + dV/dt dt + \frac{1}{2} d^2V/dS^2 (S^2 \sigma^2 dt)$$

- soit

$$Vr = dV/dS (S u) + dV/dt + \frac{1}{2} d^2V/dS^2 (S^2 \sigma^2)$$

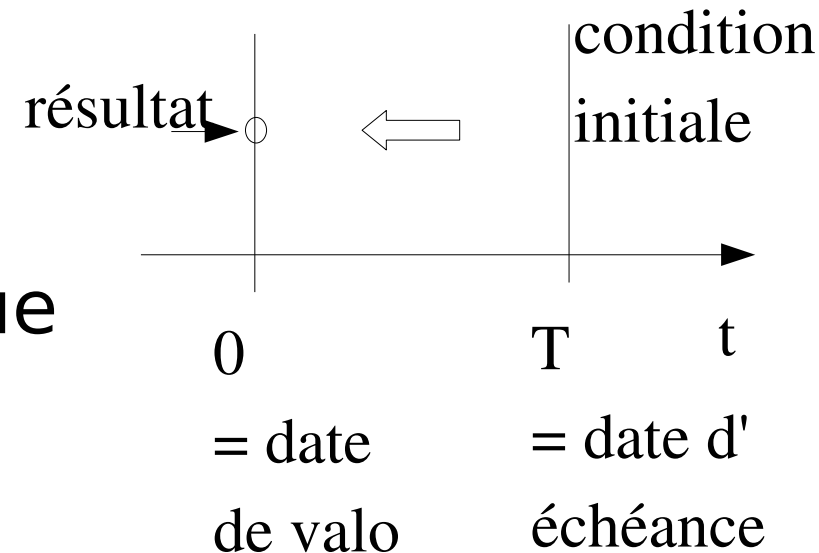
EDP de pricing

- On obtient une équation backward du type

$$dV/dt = f(V, dV/dS, dV^2/dS^2)$$

- Avec la condition initiale

- $V(t=T, S) = \text{valeur intrinsèque}$



- Où

- $V(t, s) = \text{variable/vecteur inconnu de l'EDP}$
 - $V(t=0, S_0) = \text{prix recherché}$

EDP de Pricing

- Plus précisément, on obtient l'équation

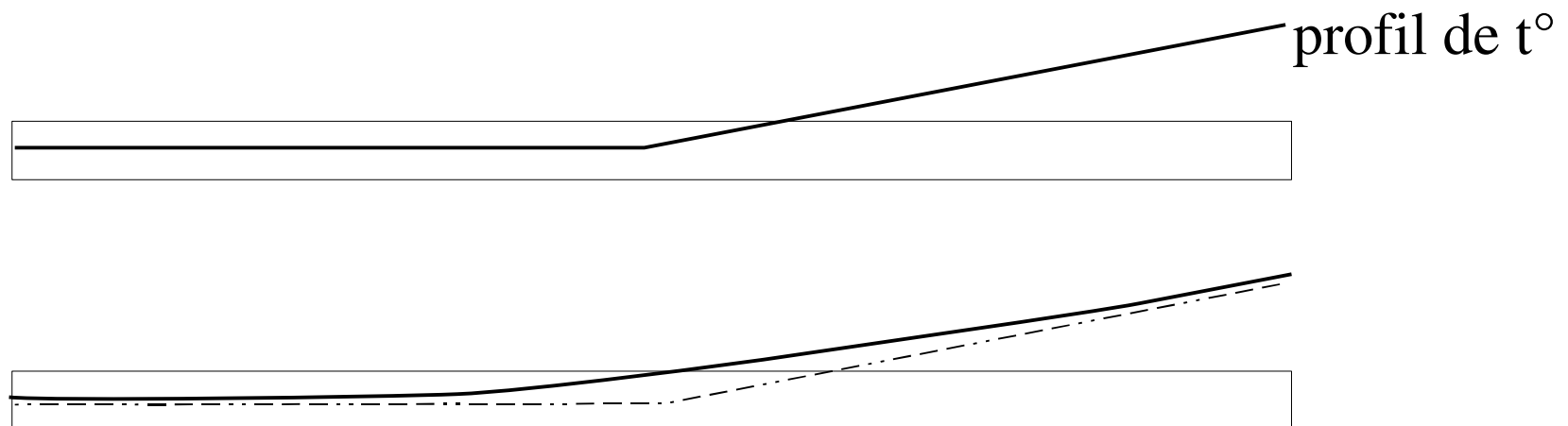
$$dV/dt = r V - Su \, dV/dS - \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \, dV^2/dS^2$$

- avec
 - V = terme exponentiel,
dû au taux sans risque
 - dV/dS = terme de déplacement,
dû aux swaps
 - dV^2/dS^2 = terme de diffusion,
dû à la volatilité

Analogies : Equation de la Chaleur

- $J = -L \text{ gradient } T$: Loi de diffusion de Fourier
- $dT/dt = k dT^2/dx^2$: équation de la chaleur
- Analogie : Valo = Température d'une barre
- Remarque:
 - Chaleur = temps forward ($k > 0$)
 - Pricing = backward ($-1/2 \sigma^2 < 0$)

diffusion
par temps
(forward) ↓



Suite des présentations : Partie 2,3,4

- Partie 2: Algorithmique Numérique
 - Méthodes EDP par les Différences Finies
 - Exemples et Démonstrations de pricing :
Décomposition graphique du Pricing pour des options Triggers, et exotiques
- Partie 3 : Informatique
 - Implémentation Orientée-Objet du Pricing
- Partie 4 : Informatique
 - Implémentation Orientée-Objet des Instruments

Questions ?